



TESIS SS14 2501

**PENAKSIRAN PARAMETER DAN STATISTIK UJI
DALAM MODEL REGRESI POISSON INVERSE
GAUSSIAN (PIG)**

**(Studi Kasus : Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur
Tahun 2013)**

**SAYU MADE WIDIARI
NRP. 1314201707**

**DOSEN PEMBIMBING
Dr.Purhadi, M.Sc
Dr.Drs. I Nyoman Latra, MS**

**PROGRAM MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016**



THESES SS14 2501

**PARAMETER ESTIMATION AND STATISTICAL
TEST IN MODELING POISSON INVERSE GAUSSIAN
REGRESSION (PIG)**

**(Case Study : The Number of HIV New Cases in East Java Province in
2013)**

**SAYU MADE WIDIARI
NRP. 1314201707**

**SUPERVISORS
Dr.Purhadi, M.Sc
Dr.Drs. I Nyoman Latra, MS**

**MAGISTER PROGRAMME
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCE
INSTITUTE OF TECHNOLOGY SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016**

**PENAKSIRAN PARAMETER DAN STATISTIK UJI DALAM MODEL
REGRESI POISSON INVERSE GAUSSIAN
(Studi Kasus : Jumlah Kasus Baru Hiv Di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013)**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Oleh:

SAYU MADE WIDIARI
NRP: 1314 201 707

Tanggal Ujian : 20 Januari 2016
Periode Wisuda : Maret 2016

Disetujui Oleh

1. Dr. Purihadi, M.Sc
NIP: 19620204 198701 1 001

(Pembimbing I)

2. Dr. I Nyoman Latra, MS
NIP: 19511130 197901 1 001

(Pembimbing II)

3. Dr. Bambang Wijanarko Otok, M.Si
NIP: 19681124 199412 1 001

(Penguji)

4. Dr. rer.pol.Dedy Dwi Prastyo, M.Si
NIP: 19831204 200812 1 002

(Penguji)

5. Dr. Titi Kanti Lestari, SE, M.Com
NIP: 19611231 198312 2 001

(Penguji)



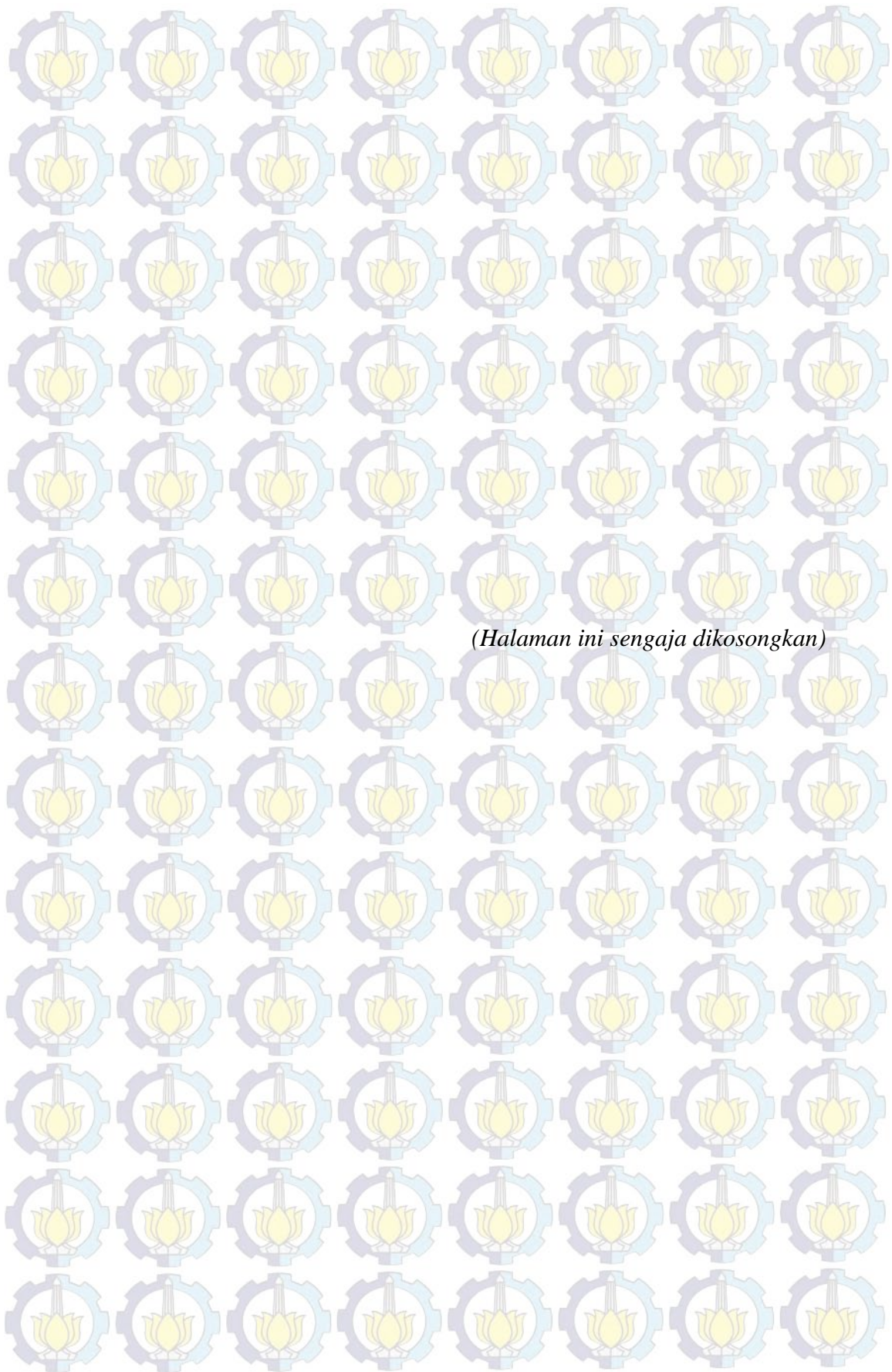
DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
ABSTRAK	ii
DAFTAR ISI	iii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Distribusi Poisson	7
2.2 Distribusi Inverse Gaussian	7
2.3 Overdispersi	8
2.4 Distribusi Poisson Inverse Gaussian	9
2.5 Regresi Poisson Inverse Gaussian	15
2.6 Estimasi Parameter Regresi PIG	17
2.7 Pengujian Parameter Regresi PIG	18
2.7.1 Pengujian Hipotesis Secara Serentak	19
2.7.2 Pengujian Hipotesis Secara Parsial	20
2.8 Kemencengan (<i>Skewness</i>)	21
2.9 Uji Korelasi	21
2.10 Multikolinearitas	22
2.11 <i>Akaike Information Criterion</i> (AIC)	23
2.12 Koefisien Korelasi <i>Filliben</i>	23
2.13 Jumlah Kasus Baru HIV dan Faktor-faktor yang Mempengaruhi	24
2.14 Penelitian-penelitian Terdahulu	26
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN	29
3.1 Sumber Data	29
3.2 Variabel Penelitian	29

3.3	Metode Penelitian	30
BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN	39
4.1	Penaksiran Parameter PIG	39
4.2	Pengujian Hipotesis Parameter PIG	57
4.2.1	Pengujian Serentak Parameter PIG	57
4.2.2	Pengujian Parsial Parameter PIG	60
4.3.	Aplikasi Poisson Inverse Gaussian	61
4.3.1	Analisis Deskriptif Variabel Penelitian	61
4.3.2	Pemeriksaan Korelasi dan Multikolinearitas	64
4.3.3	Kemencengan dan Uji Overdispersi	65
4.3.4	Pemodelan Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)	66
4.3.5	Uji Kelayakan Model Regresi PIG	69
BAB 5	Kesimpulan dan Saran	71
5.1	Kesimpulan	71
5.2	Saran	71
	DAFTAR PUSTAKA	73
	BIOGRAFI PENULIS	97

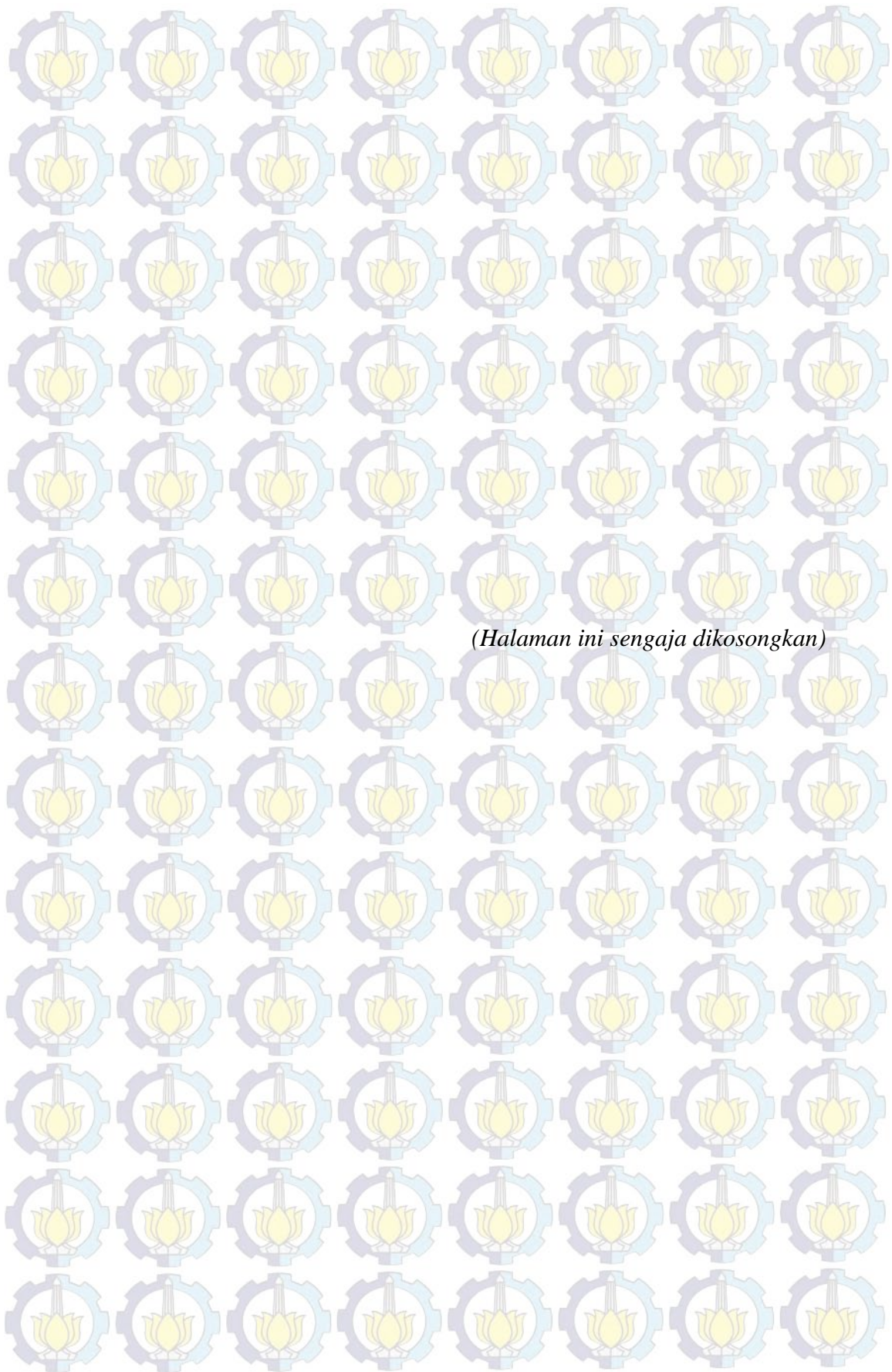
DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Variabel Penelitian, Definisi Operasional dan Tipe Data	30
Tabel 3.2. Struktur Data dalam Penelitian	31
Tabel 4.1. Analisis Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor	63
Tabel 4.2. Koefisien Korelasi Variabel Respon dan Variabel Prediktor	64
Tabel 4.3. Nilai VIF Variabel Prediktor	65
Tabel 4.4. Penaksiran Parameter Model Regresi PIG pada Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013	67



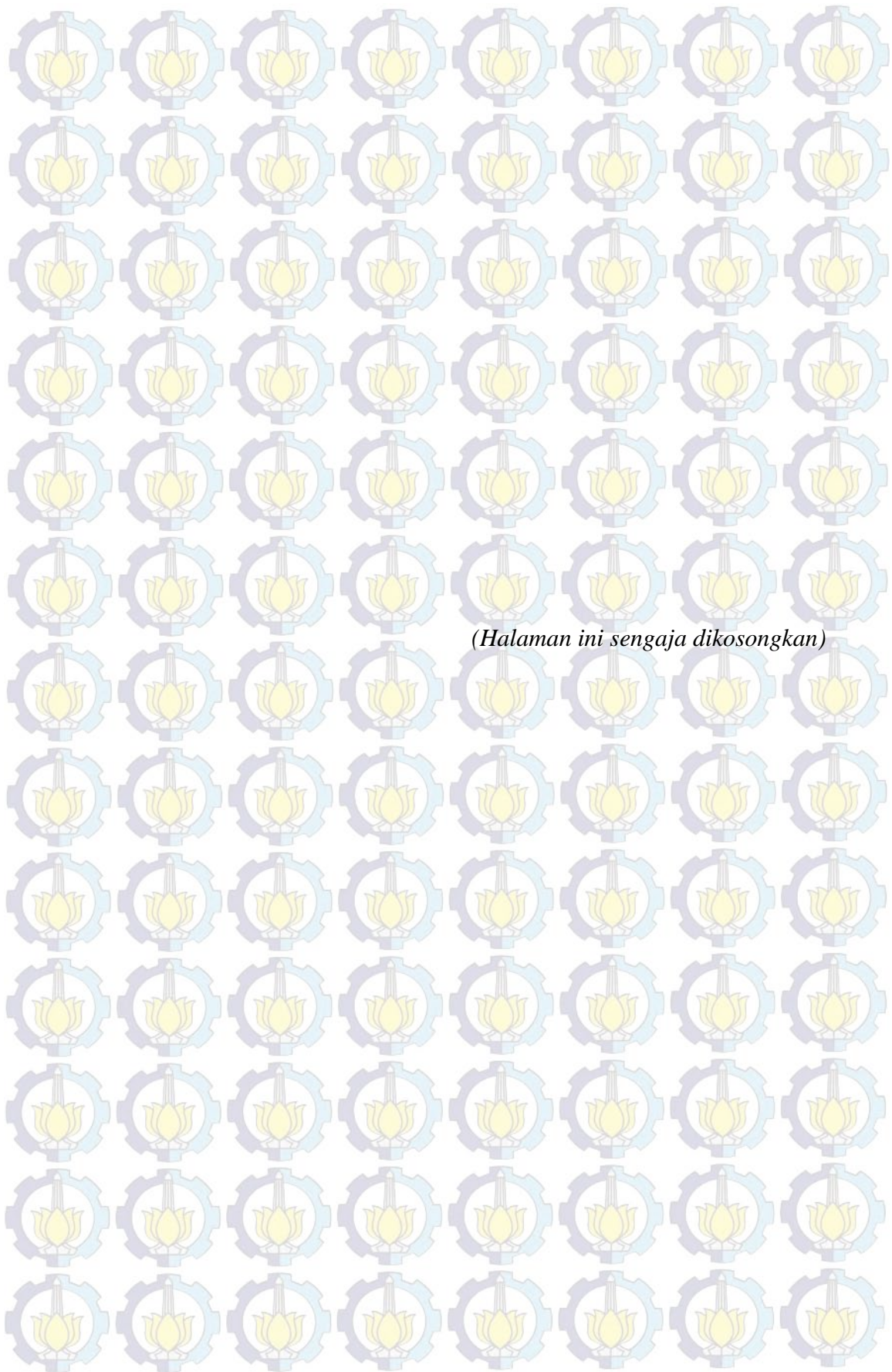
DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Plot Distribusi Poisson Inverse Gaussian (PIG) pada $\mu = 2$, $\mu = 4$, $\mu = 10$, $\mu = 20$ dan $\tau = 6$ (tetap)	10
Gambar 2.2. Plot Distribusi Poisson Inverse Gaussian (PIG) pada $\tau = 6$, $\tau = 12$, $\tau = 30$, $\tau = 60$ dan $\mu = 2$ (tetap)	11
Gambar 3.1. Langkah-langkah Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Regresi PIG	36
Gambar 3.2. Langkah-langkah Analisis Faktor-faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus Baru HIV dengan Model Regresi PIG	37
Gambar 4.1. Perkembangan Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013	61
Gambar 4.2. Peta Persebaran Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013	62
Gambar 4.3. Plot Residual dari Model Regresi PIG pada Data Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013	69



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Turunan Pertama fungsi <i>likelihood</i> PIG di bawah H_0	77
Lampiran 2. Turunan Kedua fungsi <i>likelihood</i> PIG di bawah H_0	81
Lampiran 3. Data Jumlah Kasus Baru HIV serta Faktor-Faktor yang Diduga Mempengaruhi di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013	85
Lampiran 4. Program R pada Uji Overdispersi	87
Lampiran 5. Program R pada Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)	89
Lampiran 6. Hasil Program R pada Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)	91



KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat rahmat-Nya penulis diperkenankan menyelesaikan tesis yang berjudul ***“Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Dalam Model Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG) (Studi Kasus : Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013)”*** dengan baik dan tepat waktu.

Keberhasilan penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, petunjuk, dan dukungan dari berbagai pihak. Sehubungan dengan itu, teriring rasa syukur dan doa, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Badan Pusat Statistik (BPS) yang telah memberi kesempatan serta beasiswa kepada penulis untuk melanjutkan studi program S2 di ITS.
2. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc, dan Bapak Dr. Drs. I Nyoman Latra, M.S selaku dosen pembimbing yang ditengah segala kesibukannya dapat meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, saran, masukan, serta motivasi selama penyusunan tesis ini.
3. Bapak Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si, Bapak Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si dan Ibu Dr. Titi Kanti Lestari, SE, M.Com selaku penguji yang telah banyak memberikan saran dan masukan untuk menjadikan tesis ini menjadi lebih baik.
4. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc selaku Ketua Jurusan Statistika dan Bapak Dr.rer.pol. Heri Kuswanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Jurusan Statistika FMIPA ITS atas arahan dan bantuannya selama penulis menempuh pendidikan di Program Magister Jurusan Statistika ITS.
5. Bapak Dr. Ir. Setiawan, M.S selaku dosen wali, seluruh Bapak/Ibu dosen pengajar yang telah memberikan ilmu dan pengalaman yang bermanfaat kepada penulis, serta segenap karyawan dan keluarga besar Jurusan Statistika FMIPA ITS atas segala dukungan dan bantuannya.
6. Suamiku tercinta “I Kadek Sumiadi Sastrawan” sebagai sumber motivasi yang telah hadir melengkapi perjalanan hidup penulis. Dukungan, kesabaran, pengertian, kasih sayang dan doanya sangat berharga selama ini terutama

dalam menyelesaikan tesis ini.

7. Buah hati yang paling kusayangi “I Putu Aditya Ganendra Putra” . Senyum, tawa dan segala kelucuannya menjadi semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
8. Ibu dan Ajik, yang telah membesarkan, mendidik dan mendoakan dengan penuh keikhlasan dan kasih sayang, Etha serta semua keluarga yang telah memberikan dukungan, motivasi, semangat dan doanya.
9. Teman-teman kos ARH48: Kak Nike, Mpih, Yanti, Santi, Yani dan Dian. Terima kasih untuk segala bantuan, kerjasama, keceriaan, dan kebersamaannya selama ini.
10. Teman-teman BPS angkatan 8: Mas Ali selaku Ketua Kelas, Mbak Afni selaku Bendahara kelas, Mas Mur, Mbak Nita, Mas Duto, Bang Henri, Bang Zablin, Mas Arip, Vivin, Maul, Aan, Fatih dan Bang Rory. Terima kasih atas segala bantuan, kebersamaan, dan kekompakannya selama menjalani pendidikan di ITS.
11. Teman-teman reguler angkatan 2014, Pak Irul serta semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu per satu. Penulis menyampaikan rasa terima kasih atas kritik, saran, dan masukannya.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik maupun saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan tesis ini. Akhirnya, penulis berharap mudah-mudahan tesis ini bermanfaat untuk semua pihak yang memerlukan.

Surabaya, Januari 2016

Penulis

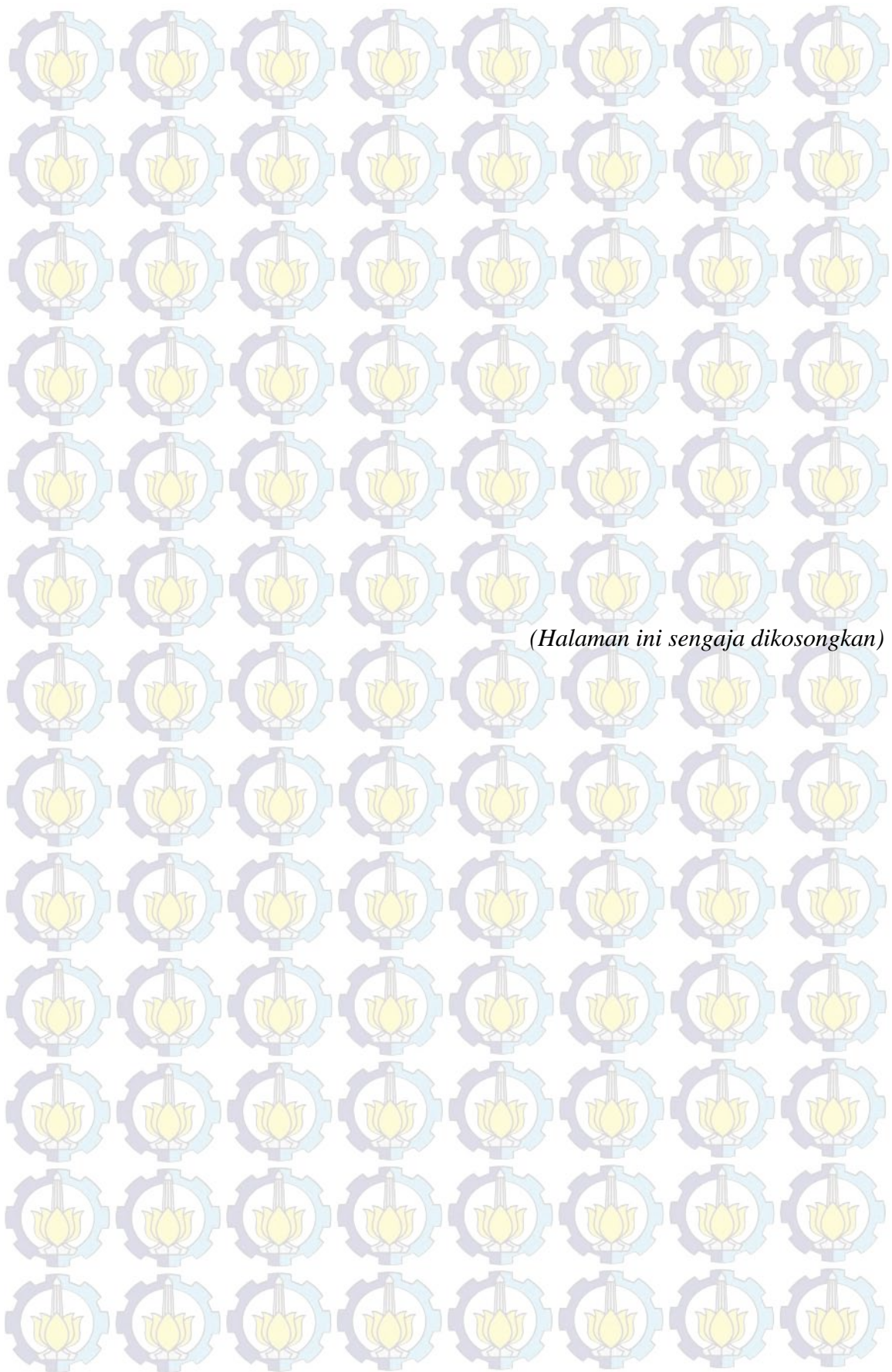
PENAKSIRAN PARAMETER DAN STATISTIK UJI PADA MODEL REGRESI POISSON INVERSE GAUSSIAN (Studi Kasus Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013)

Nama Mahasiswa : Sayu Made Widiari
NRP : 1314201707
Pembimbing : Dr.Purhadi, M.Sc
Dr.Drs. I Nyoman Latra, MS

ABSTRAK

Data *count* (data cacahan) merupakan data yang menggambarkan suatu kejadian dalam suatu waktu sehingga dalam pemodelannya bisa menggunakan regresi poisson. Namun terdapat asumsi yang harus terpenuhi bila menggunakan regresi poisson yaitu *mean* dan varians harus sama. Sementara itu, beberapa data cacahan berpotensi melanggar asumsi tersebut karena terjadi overdispersi yaitu, varians lebih besar dari *mean*. Oleh karena itu, dalam memodelkan data cacahan tersebut tidak cukup dengan regresi poisson sederhana. Regresi poisson inverse gaussian (PIG) merupakan salah satu bentuk regresi yang berasal dari distribusi *mixed poisson* yang dirancang untuk pemodelan data cacahan dengan kasus overdispersi dan telah banyak digunakan pada beberapa penelitian yang melibatkan data count. Penaksiran parameter regresi PIG dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan pengujian hipotesis dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Jumlah kasus baru *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) merupakan salah satu data cacahan yang berpotensi terjadi overdispersi. Oleh karena itu, dalam memodelkan jumlah kasus baru HIV yang terjadi di Propinsi Jawa Timur tahun 2013 dapat digunakan pemodelan dengan menggunakan regresi PIG. Dari model tersebut, variabel prediktor yang memberikan pengaruh signifikan terhadap jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur tahun 2013 adalah persentase penduduk dengan pendidikan SLTA ke atas (X2), persentase PUS yang menggunakan kondom (X3) dan rasio fasilitas kesehatan (X5). Berdasarkan plot *normalised quantile residuals* dan nilai *Filliben Coefficient Correlation*, dapat disimpulkan bahwa model yang terbentuk sudah sesuai (*fit*).

Kata kunci : Regresi PIG, MLE, MLRT, HIV



(Halaman ini sengaja dikosongkan)

PARAMETER ESTIMATION AND STATISTICAL TEST IN MODELING POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION (PIG)

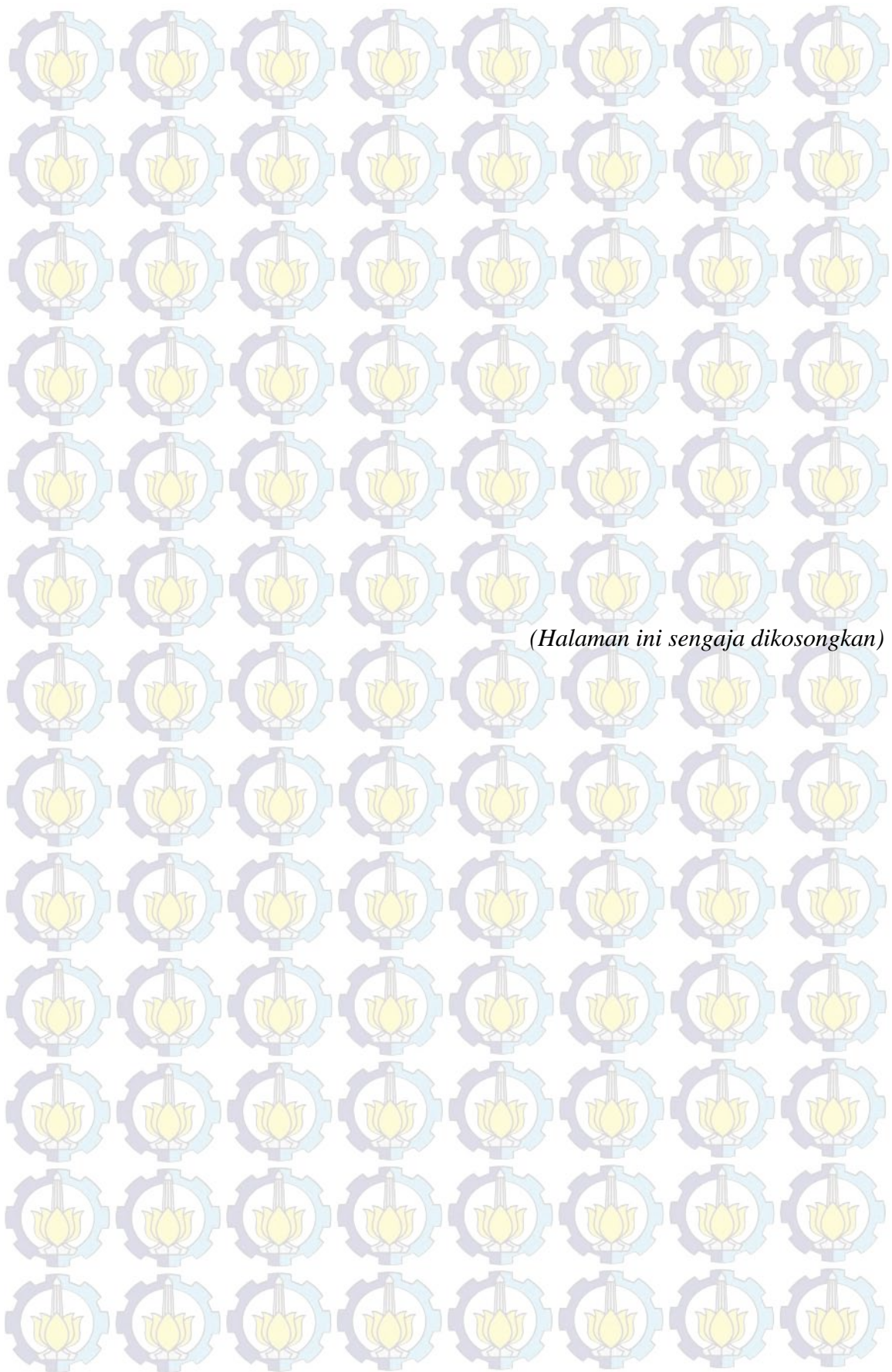
**(Case Study : The Number of HIV New Cases in East Java
Province in 2013)**

Name : Sayu Made Widiari
NRP : 1314201707
Supervisors : Dr.Purhadi, M.Sc
Dr.Drs. I Nyoman Latra, MS

ABSTRACT

Count data is data that describes a number of events that occur in a certain period. In statistics, count data is always modeled with a simple Poisson regression. But there is assumption which should be fulfilled in poisson regression, that is means equals to variance (equidispersion). But in fact, most of the count data fail to describe the assumption, since the variance is larger than the means (overdispersion). Hence, modeling this kind of count data is not appropriate with the simple poisson regression. Poisson Inverse Gaussian (PIG) regression is one of regression formed by the mixed poisson distribution which is designed for overdispersion data. Parameter estimation in PIG regression is obtained with Maximum Likelihood Estimation (MLE) method and the statistical test is established with Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT) method. The number of HIV new cases is one of the overdispersion count data. Therefore, PIG regression can be implemented for modeling the number of HIV new cases in East Java Province in 2013. The result shows that there are three predictor variables which are significantly affect the number of HIV new cases in East Java Province in 2013, those are percentage of population with high school education and higher (X2), percentage of couples with childbearing age who use condom (X3) dan ratio of health facilities (X5). Based on normalised quantile residuals plot and Filliben Coefficient Correlation value, it is concluded that the model above is fit with the data.

Keywords : PIG regression, MLE, MLRT, HIV.



(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Data cacahan (*count data*) adalah data yang menggambarkan sejumlah kejadian yang terjadi pada suatu kurun waktu tertentu. Suatu data cacahan hanya dapat berupa bilangan bulat positif karena suatu kejadian tidak mungkin terjadi dalam sejumlah bilangan negatif. Pemodelan data cacahan banyak digunakan dalam berbagai ilmu seperti sosiologi, kedokteran, aktuaria dan demografi.

Pemodelan data cacahan tidak dapat dilakukan dengan menggunakan regresi OLS (*Ordinary Least Square*), karena pemodelan data cacahan akan melanggar dua asumsi yang disyaratkan dalam regresi OLS yaitu, error mengikuti distribusi normal (normalitas) dan memiliki sifat homokedastisitas (varians konstan). Distribusi bersyarat dari data cacahan cenderung menceng kanan dengan tidak ada kejadian yang dibawah nol dan jumlah kejadian dengan frekuensi tinggi hanya sedikit sehingga melanggar asumsi kenormalan. Pelanggaran asumsi varians konstan terjadi karena dalam data cacahan sering terjadi peningkatan varians bersyarat sebagai akibat peningkatan nilai prediktor. Inilah yang disebut sebagai heterokedastisitas yang dapat mengakibatkan standar error dan uji signifikansi yang *biased* bila menerapkan regresi OLS (Coxe, West dan Aiken, 2009).

Pengembangan dalam pemodelan data cacahan memunculkan pemodelan data cacahan dengan *Generalized Linear Models* (GLMs). GLMs merupakan generalisasi dari model regresi normal klasik atau regresi OLS dari berbagai asumsi yang ketat dan menyediakan metode analisis bagi data tidak normal (De Jong dan Heller, 2008). Regresi Poisson adalah salah satu anggota keluarga dari GLMs yang berasal dari distribusi poisson. Distribusi poisson merupakan distribusi diskrit dengan nilai variabel random berupa bilangan bulat positif sehingga menjadi pilihan yang baik untuk pemodelan data cacahan. Distribusi poisson hanya ditentukan oleh satu parameter yang mendefinisikan baik *mean* maupun varians dari distribusi tersebut, sehingga dalam regresi Poisson terdapat

asumsi yang harus terpenuhi yaitu *mean* dan varians variabel respon harus sama (*equidispersion*).

Namun dalam kenyataannya sering terjadi pelanggaran asumsi tersebut dimana varians lebih kecil dari *mean* (*underdispersion*) atau varians lebih besar dari *mean* (*overdispersion*). Pada kebanyakan data *count* terkadang ditemukan kasus overdispersi (Consul dan Famoye, 1992). Dalam praktiknya, data cacahan sering menunjukkan varians yang cukup besar karena banyak mengandung nilai nol (*extra zeros*) atau sebaran yang lebih besar dari nilai-nilai pada data atau keduanya (Hu, Pavlicova dan Nunes, 2011). Data dengan jumlah nol yang banyak bisa disebabkan karena nol struktural (*structural zeros*) atau karena nol sampel (*sampling zeros*). Lebih lanjut, Hu, Pavlicova dan Nunes memberi contoh jumlah perilaku seksual beresiko tinggi dalam membandingkan kedua hal tersebut. Nilai nol pada jumlah perilaku seksual beresiko tinggi bisa disebabkan karena seseorang yang tidak memiliki pasangan sehingga memang belum pernah melakukan hubungan seksual yang disebut nol struktural (*structural zeros*) atau bisa juga karena seseorang yang sudah memiliki pasangan dan belum pernah melakukan seksual beresiko tinggi yang disebut sebagai nol sampel (*sampling zeros*).

Kasus overdispersi bila diabaikan bisa mengakibatkan terjadinya *underestimate* pada estimasi standar error, sehingga dapat mengakibatkan kesalahan pada pengambilan keputusan beberapa uji hipotesis, misalnya suatu variabel prediktor berpengaruh signifikan ketika pada kenyataan tidak berpengaruh signifikan (Hilbe, 2007). Dalam mengatasi kasus overdispersi, dibentuk beberapa pemodelan yang merupakan perpaduan antara distribusi Poisson dengan beberapa distribusi baik diskrit maupun kontinu (*mixed poisson distribution*). *Mixed poisson distribution* tersebut merupakan solusi alternatif untuk kasus overdispersi, tetapi hanya beberapa distribusi yang sering digunakan dalam penelitian dikarenakan penghitungannya yang rumit. Salah satunya adalah distribusi Poisson Invers Gaussian (PIG) yang merupakan *mixed poisson distribution* dengan random efek yang memiliki distribusi Invers Gaussian. Distribusi ini pertama kali diperkenalkan oleh Holla pada tahun 1966 (Karlis dan Nikoloulopoulos, 2005). Distribusi PIG sendiri merupakan bentuk dari distribusi

Siche (SI) dengan dua parameter. SI disebut sebagai model yang lebih baik dari model binomial negatif, terutama untuk data yang overdispersi yang tinggi dan cenderung menceng kanan (*highly skewed to the right*). Namun penghitungannya lebih rumit karena memiliki tiga parameter pada fungsi kepadatan peluangnya. Sebagai bentuk dari distribusi SI adalah distribusi PIG yang digunakan dalam memodelkan data cacahan yang menceng kanan serta memiliki ekor yang sedikit lebih panjang. Akan tetapi, distribusi PIG memiliki bentuk fungsi likelihood yang *close form* dan penghitungannya lebih mudah sehingga banyak penelitian yang melibatkan data cacahan banyak yang menggunakan model ini (Stasinopoulos dan Rigby, 2007).

Willmot (1987) menunjukkan potensi dari pemodelan dengan regresi poisson inverse gaussian sebagai alternatif dari regresi binomial negatif pada data klaim asuransi mobil. Enam set data klaim asuransi mobil disajikan dengan karakteristik hampir 80 persen data yang mengandung nol, dan menghasilkan kesimpulan bahwa pemodelan dengan regresi PIG merupakan model yang lebih baik dibandingkan model regresi binomial negatif. Penelitian lainnya yang menggunakan model regresi PIG adalah penelitian dari Shoukri, Asyali dan Vandorp (2004) yang menggunakan model tersebut pada data jumlah kasus penyakit mastitis pada sapi perah di Ontario Canada dan menghasilkan kesimpulan bahwa regresi PIG merupakan model yang lebih baik dari model regresi binomial negatif. Selanjutnya dalam beberapa penelitian keselamatan di jalan raya seperti pemodelan data kecelakaan dan penelitian asuransi motor, model regresi PIG sering digunakan sebagai alternatif dari model regresi binomial negatif (Denis, Ghitany dan Gupta, 2014). Pemodelan dengan regresi PIG juga digunakan pada penelitian Zha, Lord dan Zou (2014) pada kasus jumlah kecelakaan motor yang terjadi di dua tempat berbeda yaitu di Texas dan Washington. Dalam penelitian tersebut data jumlah kecelakaan motor menceng kanan dengan ekor yang sedikit panjang serta 37 persen data mengandung nilai nol. Dengan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC) dan *Bayesian Information Criterion* (BIC) yang lebih kecil, menunjukkan bahwa pemodelan dengan regresi PIG lebih baik untuk memodelkan kasus jumlah kecelakaan motor di dua tempat tersebut.

Jumlah kasus baru *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) di suatu wilayah merupakan salah satu bentuk data count sehingga dalam pemodelannya bisa menggunakan regresi Poisson. Data mengenai jumlah kasus HIV juga berpotensi terjadi overdispersi sehingga untuk pemodelannya tidak cukup menggunakan regresi poisson. Penelitian Owusu (2011) memodelkan jumlah kasus HIV di sebuah rumah sakit di Ghana dengan menggunakan regresi poisson serta regresi binomial negatif, dikarenakan data jumlah kasus HIV tersebut mengalami overdispersi.

Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan penyakit yang disebabkan oleh virus yang menyerang limfosit CD4 atau sistem kekebalan tubuh, dan bila tidak menjalani pengobatan secara teratur virus ini akan mengakibatkan sistem kekebalan tubuh seseorang melemah, rentan terhadap penyakit dan sulit sembuh dari berbagai penyakit yang selanjutnya dikenal dengan penyakit *Aquired Immuno Deficiency Syndrome* (AIDS) yang selanjutnya menyebabkan kematian. Penularan HIV yang utama di Indonesia adalah penggunaan jarum suntik yang tidak aman secara bersama-sama diantara pengguna narkotika dan obat-obatan terlarang (narkoba), dan diikuti hubungan heteroseksual, penularan prenatal dari ibu kepada janinnya selama periode kehamilan, melahirkan atau menyusui. Cara penularan lainnya melalui darah yang terinfeksi seperti transfusi darah dan penyayatan kulit seperti pembuatan tato (BPS, 2012).

Penyakit HIV ini dapat membawa dampak yang menghancurkan, bukan hanya terhadap kesehatan masyarakat namun juga terhadap negara secara keseluruhan. Menurut data dari Kementrian Kesehatan, sampai saat ini prevalensi kasus HIV di Indonesia mencapai 23 orang per 100.000 penduduk. Jumlah kumulatif kasus HIV di Indonesia sampai dengan bulan september 2014 tercatat sebanyak 150.285 kasus dengan propinsi Jawa Timur berada di urutan kedua dengan jumlah kasus kumulatif HIV terbanyak yaitu sebanyak 19.249 kasus HIV. Angka tersebut sesungguhnya jauh lebih kecil dibandingkan angka yang sebenarnya terjadi (fenomena gunung es), dikarenakan baru sebagian kecil yang dilaporkan dan terdeteksi. Jumlah kasus kumulatif merupakan akumulasi dari beberapa tahun sebelumnya karena seseorang yang terinfeksi virus HIV tidak dapat disembuhkan dan kasusnya akan terus tercatat dan terakumulasi. Jumlah

kasus baru HIV dapat dijadikan patokan suatu daerah dalam mengukur keberhasilan pemerintahnya dalam menghambat laju penyebaran penyakit HIV. Jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur pada tahun 2013 mengalami peningkatan yaitu mencapai 4.661 kasus dibandingkan tahun 2012 sebanyak 3.698 kasus.

Saat ini upaya untuk menghentikan laju penyebaran penyakit HIV telah menjadi agenda di berbagai daerah di Indonesia termasuk Propinsi Jawa Timur. Berbagai program dan strategi telah dilakukan oleh pemerintah untuk mengatasi masalah tersebut, diantaranya dengan meningkatkan potensi dan fasilitas kesehatan di kabupaten/kota. Peningkatan kualitas pelayanan kesehatan tidak selalu menjamin peningkatan pada pemanfaatan pelayanan tersebut, sehingga usaha untuk menghambat laju penyebaran HIV tidak bisa hanya dilihat dari upaya peningkatan sarana kesehatan dan tenaga kesehatan saja. Berbagai faktor sosial ekonomi dapat menjadi hambatan dalam pemanfaatan fasilitas-fasilitas dan pelayanan kesehatan.

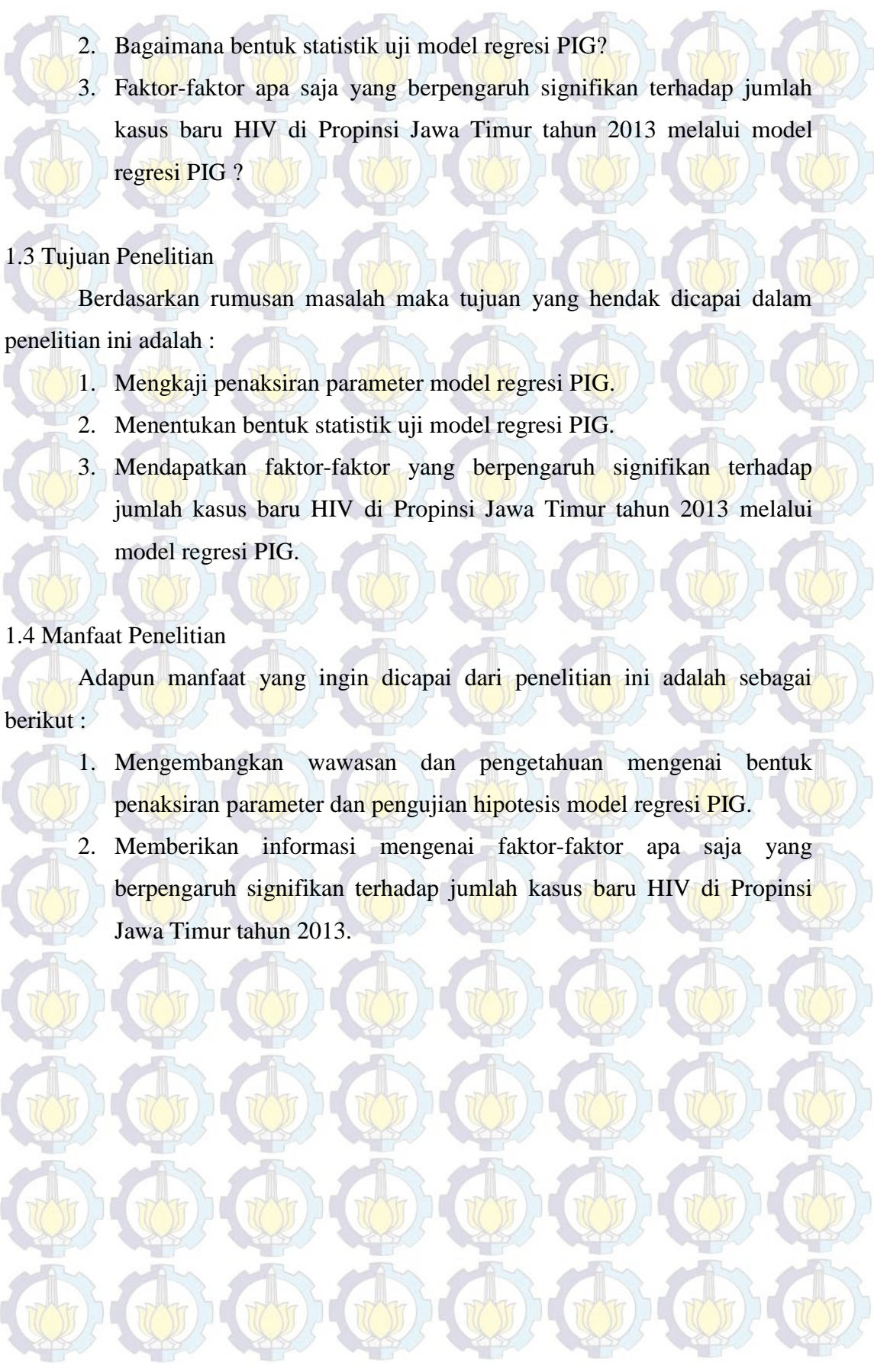
Beberapa penelitian yang menghubungkan status sosial ekonomi dengan kasus HIV, diantaranya penelitian yang dilakukan oleh Ogunmola, Oladosu dan Olamoyegun (2014) yang menghubungkan beberapa variabel demografi seperti tingkat pendidikan, status pekerjaan, pendapatan per bulan dan status perkawinan dengan peluang seseorang mengidap HIV di sebuah pusat pengobatan di Nigeria. Hasil penelitian menyimpulkan bahwa tingkat pendidikan pada level SLTP ke bawah dan pendapatan bulanan pada level rendah memiliki hubungan yang signifikan terhadap peluang seseorang mengidap HIV.

Data jumlah kasus baru HIV pada tahun 2013 di Propinsi Jawa Timur merupakan data cacahan yang mengandung jumlah nol yang cukup banyak dan beberapa data dengan nilai yang besar sehingga berpotensi terjadi overdispersi dan menceng kanan sehingga dalam pemodelannya digunakan regresi PIG.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka permasalahan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Bagaimana bentuk penaksiran parameter model regresi PIG ?

- 
2. Bagaimana bentuk statistik uji model regresi PIG?
 3. Faktor-faktor apa saja yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur tahun 2013 melalui model regresi PIG ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan yang hendak dicapai dalam penelitian ini adalah :

1. Mengkaji penaksiran parameter model regresi PIG.
2. Menentukan bentuk statistik uji model regresi PIG.
3. Mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur tahun 2013 melalui model regresi PIG.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang ingin dicapai dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengembangkan wawasan dan pengetahuan mengenai bentuk penaksiran parameter dan pengujian hipotesis model regresi PIG.
2. Memberikan informasi mengenai faktor-faktor apa saja yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur tahun 2013.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan distribusi probabilitas diskrit yang menyatakan peluang jumlah peristiwa yang terjadi pada periode waktu tertentu apabila rata-rata kejadian tersebut diketahui dan dalam waktu yang saling bebas sejak kejadian terakhir. Distribusi Poisson juga dapat digunakan untuk jumlah kejadian pada interval tertentu seperti jarak, luas, atau volume. Distribusi poisson merupakan model patokan (*benchmark*) bagi data cacahan (Cameron dan Trivedi, 1998).

Fungsi peluang untuk data berdistribusi Poisson bergantung pada parameter tunggal, yaitu rata-rata μ . Fungsi peluangnya adalah sebagai berikut :

$$f(y; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} \text{ untuk } y = 0, 1, 2, \dots \text{ dan } \mu > 0. \quad (2.1)$$

Dalam distribusi Poisson, rata-rata dan variansi adalah bernilai sama dan dapat dituliskan sebagai berikut :

$$E(Y) = \text{Var}(Y) = \mu. \quad (2.2)$$

2.2. Distribusi Inverse Gaussian

Distribusi inverse gaussian merupakan distribusi kontinu dengan fungsi kepadatan mirip dengan distribusi gamma tapi dengan kemencengan lebih besar dan keruncingan tajam. Inverse gaussian memiliki dua parameter dan fungsi kepadatan peluang yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(y) = (2\pi y^3 \sigma)^{-0.5} e^{-(y-\mu)^2 / 2y\mu^2 \sigma^2}, y > 0, \quad (2.3)$$

dengan rata-rata dan variansi

$$E(Y) = \mu \text{ dan } \text{Var}(Y) = \sigma^2 \mu^3,$$

dan σ^2 adalah parameter dispersi. Inverse gaussian digunakan pada keadaan dengan kemencengan yang ekstrem. Nama inverse gaussian sendiri berasal dari fungsi kumulatif yang memiliki hubungan invers dengan fungsi kumulatif

(logaritma natural dari fungsi MGF) distribusi normal/distribusi Gaussian (De Jong dan Heller, 2008).

2.3. Overdispersi

Pada regresi Poisson terdapat asumsi yang harus terpenuhi yaitu *mean* dan *variance* variabel respon harus sama (*equidispersion*). Overdispersi pada regresi Poisson terjadi ketika varians dari variabel respons lebih besar dari rata-rata. Overdispersi disebabkan oleh korelasi positif atau kelebihan variasi antara peluang respon. Overdispersi juga muncul ketika terjadi pelanggaran pada asumsi distribusi data, misal ketika data dikelompokkan sehingga melanggar asumsi observasi dari kebebasan likelihood (Hilbe, 2007). Overdispersi dapat menyebabkan terjadinya kesalahan dalam interpretasi model karena overdispersi yang terabaikan akan menghasilkan nilai *standar error* yang *underestimate*. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mendeteksi ada atau tidaknya overdispersi pada variabel respon yang akan diteliti adalah dengan melihat nilai dari *The variance test* (VT), yaitu sebagai berikut :

$$VT = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\bar{y}} = (n-1) \frac{S^2}{\bar{y}}. \quad (2.4)$$

Nilai ini sama dengan rasio varians terhadap rata-rata (*variance-to-mean ratio*), dimana seringkali disebut sebagai indeks dispersi, dikalikan dengan $n-1$, dimana n adalah ukuran sampel. Bila nilai indeks dispersi kurang dari 1 maka dapat dikatakan terjadi underdispersi, sebaliknya overdispersi terjadi bila nilai indeks dispersi lebih dari 1 (Karlis dan Xekalaki, 2000).

Uji statistik yang bisa digunakan untuk mendeteksi overdispersi pada suatu data adalah uji overdispersi yang dapat ditemukan pada *package* AER dari *software* R. Uji ini mengimplementasikan uji yang dikembangkan oleh Cameron dan Trivedi (1990). Uji ini mengikuti ide sederhana yaitu bahwa dalam model regresi poisson, varians sama dengan rata-rata yaitu μ sehingga dalam uji ini hipotesis yang digunakan adalah

$$\begin{aligned} H_0 : \text{var}(Y) &= \mu_i \\ H_1 : \text{var}(Y) &= \mu_i + \alpha.g(\mu_i), \end{aligned}$$

dimana $g(\cdot)$ merupakan suatu fungsi tertentu. Secara sederhana, bila nilai $\alpha = 0$ maka dapat dikatakan equidispersi, sebaliknya bila $\alpha > 0$ maka dapat dikatakan overdispersi. Uji statistik yang digunakan adalah

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ (Y_i - \hat{\mu}_i)^2 - Y_i \right\}, \quad (2.5)$$

dimana $\hat{\mu}_i = \mu_i(\mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\beta}})$ dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan estimasi $\boldsymbol{\beta}$ dari MLE di bawah model poisson (Dean, Lawless dan Willmot, 1989b). Distribusi yang asimtotik terhadap T adalah distribusi normal standar di bawah hipotesis nol (Cameron dan Trivedi, 1990).

2.4. Distribusi Poisson Inverse Gaussian

Distribusi poisson inverse gaussian merupakan salah satu distribusi *mixed poisson*. Bentuk dari distribusi *mixed poisson* tergantung pada distribusi pada random efek (v).

Misalkan $g(v)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari v dan distribusi marginal untuk Y diperoleh dengan integral v_i :

$$P(Y = y | \mu) = \int f(y | \mu, v) g(v) dv. \quad (2.6)$$

Untuk distribusi Poisson Inverse Gaussian, v pada persamaan (2.6) diasumsikan mengikuti distribusi inverse gaussian dan memiliki fungsi kepadatan peluang yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$g(v) = \left(2\pi\tau v^3 \right)^{-0.5} e^{-(v-1)^2/2\tau v}, \quad v > 0, \quad (2.7)$$

dimana

$$\tau = \text{Var}(V), \quad E(V) = 1.$$

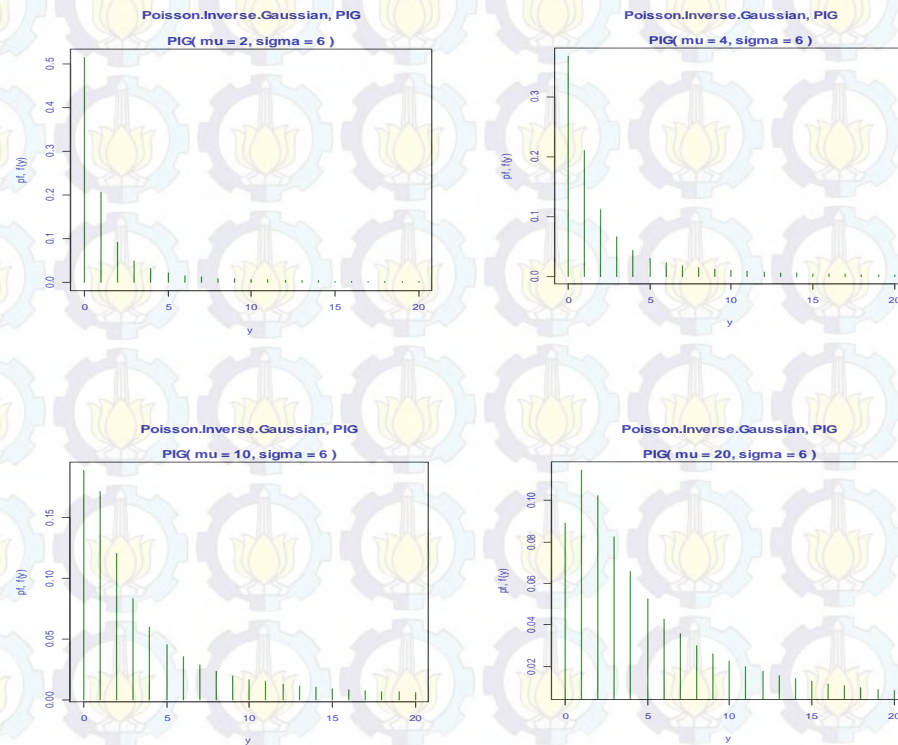
Pada akhirnya, distribusi PIG, dilambangkan dengan $\text{PIG}(\mu, \tau)$ diberikan oleh :

$$P(y | \mu, \tau) = \left(\frac{2z}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu^y e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z)}{(z\tau)^y y!}, \quad (2.8)$$

dimana

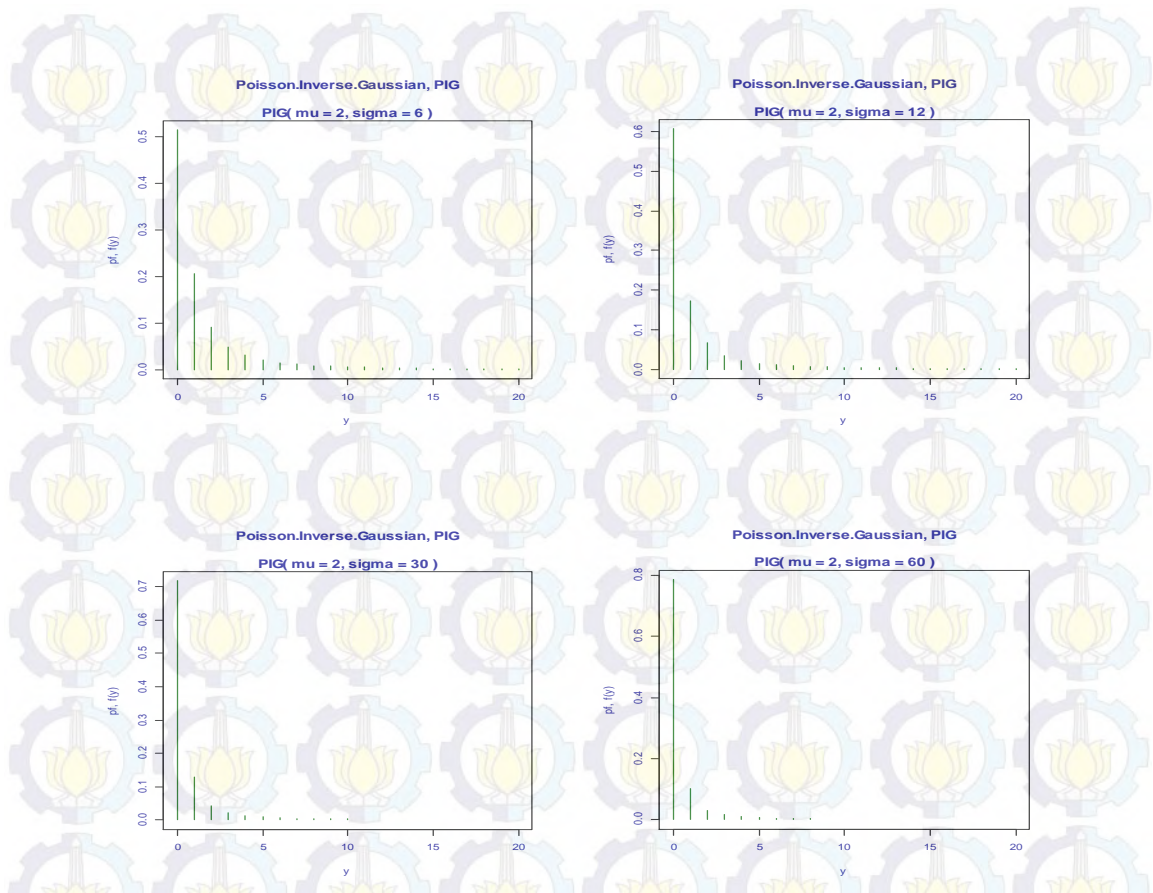
$$s = y - \frac{1}{2} \text{ dan } z = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\mu}{\tau}}.$$

$K_s(z) = K_{y-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{(2\mu\tau+1)}\right)$ adalah fungsi Bessel modifikasi jenis ketiga (Willmott, 1987).



Gambar 2.1. Plot Distribusi Poisson Inverse Gaussian (PIG) pada $\mu = 2$, $\mu = 4$, $\mu = 10$, $\mu = 20$ dan $\tau = 6$ (tetap)

Distribusi poisson inverse gaussian ditentukan oleh dua parameter yaitu rata-rata (μ) sebagai parameter lokasi (*location parameter*) dan parameter dispersi (τ) sebagai parameter bentuk (*shape parameter*). Gambar 2.1 menunjukkan pergeseran plot fungsi kepadatan peluang distribusi poisson inverse gaussian (PIG) sepanjang sumbu horizontal saat nilai parameter bentuk (τ) tetap untuk berbagai macam nilai parameter lokasi (μ). Gambar 2.2 menunjukkan bahwa semakin besar nilai τ maka bentuk plot semakin bergeser ke kiri.



Gambar 2.2. Plot Distribusi Poisson Inverse Gaussian (PIG) pada $\tau = 6$, $\tau = 12$, $\tau = 30$, $\tau = 60$ dan $\mu = 2$ (tetap)

Berikut adalah pembuktian dari proses *mixed* Poisson dari persamaan (2.6) :

$$\begin{aligned}
 P(Y = y | \mu) &= \int_0^{\infty} f(y | \mu) g(v) dv \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-v\mu} \frac{(\mu v)^y}{y!} g(v) dv \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-v\mu} \frac{(\mu v)^y}{y!} \left(2\pi\tau v^3\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(v-1)^2}{2\tau v}} dv \\
 &= \frac{\mu^y (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}}}{y!} \int_0^{\infty} e^{-v\mu} v^{y-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(v^2-2v+1)}{2\tau v}} dv \\
 &= \frac{\mu^y (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}}}{y!} \int_0^{\infty} e^{-v\mu} v^{y-\frac{3}{2}} e^{-\frac{v}{2\tau}} e^{\frac{1}{\tau}} e^{-\frac{1}{2\tau v}} dv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y = y | \mu) &= \frac{\mu^y (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} \int_0^\infty e^{-v\mu} v^{y-\frac{3}{2}} e^{-\frac{v}{2\tau}} e^{-\frac{1}{2\tau v}} dv \\
&= \frac{\mu^y (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} \int_0^\infty e^{-v\mu} v^{y-\frac{3}{2}} e^{-v\left(\mu+\frac{1}{2\tau}\right)-\left(\frac{1}{2\tau}\right)v^{-1}} dv \\
&= \frac{\mu^y (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} \int_0^\infty e^{-v\mu} v^{y-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{2\mu\tau+1}{2\tau}\right)v-\left(\frac{1}{2\tau}\right)v^{-1}} dv.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Berdasarkan tabel integral oleh Gardshteyn dan Ryzhik, 1980 seperti yang disebutkan dalam Shoukri, Asyali, Vandorp dan Kelton, 2004 bahwa

$$\int_0^\infty e^{-ax^h - bx^{-h}} x^{s-1} dx = \left(\frac{2}{h}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{s}{2h}} K_{\frac{s}{h}} \left(2\sqrt{ab}\right)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\left(\frac{2\mu\tau+1}{2\tau}\right)v-\left(\frac{1}{2\tau}\right)v^{-1}} v^{y-\frac{3}{2}} dv &= 2 \left(\frac{1}{2\mu\tau+1}\right)^{\frac{y-\frac{1}{2}}{2}} K_{y-\frac{1}{2}} \left(2\sqrt{\left(\frac{2\mu\tau+1}{4\tau^2}\right)}\right) \\
&= 2 \left(\frac{1}{2\mu\tau+1}\right)^{\frac{y-\frac{1}{2}}{2}} K_{y-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}\right)
\end{aligned}$$

kemudian persamaan tersebut disubstitusikan ke persamaan akhir dari persamaan (2.9) maka

$$\begin{aligned}
P(Y = y | \mu) &= \frac{\mu^y (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} 2(2\mu\tau+1)^{-\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{2}\right)} K_{y-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}\right) \\
&= \frac{\mu^y e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{2}\right)} K_{y-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}\right) \\
&= \frac{\mu^y e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau}{\sqrt{2\mu\tau+1}}\right)^y K_{y-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y = y | \mu) &= \frac{\mu^y e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\sqrt{\frac{(2\mu\tau+1)}{\tau^2}} \right)^{\frac{1}{2}}}{\tau^y \left(\sqrt{\frac{(2\mu\tau+1)}{\tau^2}} \right)^y} K_{y-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1} \right) \\
&= \left(\frac{2z}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu^y e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z)}{(z\tau)^y y!}.
\end{aligned}$$

Probabilita distribusi PIG dapat dihitung sebagai berikut :

$$P(Y = y | \mu) = \frac{\mu^y e^{\frac{1}{\tau}}}{y!} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{2}\right)} K_{y-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1} \right).$$

Dalam Shoukri, dkk, 2004, fungsi Bessel memiliki beberapa properti penting yaitu diantaranya sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
K_{\frac{1}{2}}(a) &= K_{-\frac{1}{2}}(a) = \left(\frac{\pi}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-a}, \\
K_{\frac{3}{2}}(a) &= \left(1 + \frac{1}{a} \right) K_{\frac{1}{2}}(a).
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan properti-properti pada fungsi Bessel di atas maka fungsi probabilitas dari distribusi Poisson Inverse Gaussian (PIG) dapat dihitung sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= e^{\frac{1}{\tau}} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{\frac{1}{4}} K_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1} \right) \\
&= e^{\frac{1}{\tau}} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2\mu\tau+1}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}} \\
&= e^{\frac{1}{\tau}} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\pi\tau}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}} \\
&= e^{\frac{1}{\tau} (1 - \sqrt{2\mu\tau+1})}
\end{aligned}$$

$$P(Y=1) = \mu e^{\frac{1}{\tau}} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1} \right)$$

$$= \mu e^{\frac{1}{\tau}} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\pi}{\frac{2}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}}$$

$$= \mu(2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\tau}(1-\sqrt{2\mu\tau+1})}$$

$$= \mu(2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{2}} P(Y=0)$$

$$P(Y=2) = \frac{\mu^2 e^{\frac{1}{\tau}}}{2!} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\frac{3}{4}} K_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1} \right)$$

$$= \frac{\mu^2 e^{\frac{1}{\tau}}}{2} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}} \right) \left(\frac{\pi}{\frac{2}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}}$$

$$P(Y=2) = \frac{\mu^2 e^{\frac{1}{\tau}}}{2} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \tau(2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{\pi\tau}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{2\mu\tau+1} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}}$$

$$= \frac{\mu^2 e^{\frac{1}{\tau}}}{2} (2\mu\tau+1)^{-1} \left(1 + \tau(2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1}}$$

$$= \frac{1}{2} P(Y=0) \frac{\mu^2}{(2\mu\tau+1)} \left(1 + \tau(2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{2\mu\tau}{2\mu\tau+1} \left(\frac{1}{4} \right) \mu(2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{2}} P(Y=0) + \frac{\mu^2}{(2\mu\tau+1)} \left(\frac{1}{2} \right) P(Y=0)$$

$$= \frac{2\mu\tau}{2\mu\tau+1} \left(\frac{1}{4} \right) P(Y=1) + \frac{\mu^2}{(2\mu\tau+1)} \left(\frac{1}{2} \right) P(Y=0)$$

$$P(Y=3) = \frac{\mu^3 e^{\frac{1}{\tau}}}{3!} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu\tau+1)^{-\frac{5}{4}} K_{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu\tau+1} \right).$$

Dengan cara yang sama seperti $P(Y=2)$ maka diperoleh

$$P(Y=3) = \frac{2\mu\tau}{2\mu\tau+1} \left(\frac{3}{6} \right) P(Y=2) + \frac{\mu^2}{2\mu\tau+1} \left(\frac{1}{6} \right) P(Y=1),$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= e^{\frac{1}{\tau}(1-\sqrt{2\mu\tau+1})} \\
P(Y=1) &= \mu(2\mu\tau+1)^{-\frac{1}{2}} P(Y=0) \\
P(Y=y) &= \frac{2\mu\tau}{2\mu\tau+1} \left(1 - \frac{3}{2y}\right) P(y-1) + \frac{\mu^2}{2\mu\tau+1} \frac{1}{y(y-1)} P(y-2). \\
y &= 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Hal ini menjadi

$$\begin{aligned}
M(y) &= (y+1) \frac{p(y+1)}{p(y)}, \\
\text{sehingga } \frac{K_{y+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y-\frac{1}{2}}(z)} &= (1+2\mu\tau)^{\frac{1}{2}} M(y).
\end{aligned}$$

Fungsi pembangkit peluang (*probability generating function*) untuk PIG diberikan oleh :

$$P(z) = \sum_{i=1}^n p(y) z^y = \exp \left(\tau^{-1} \left[1 - \left\{ 1 - 2\tau\mu(z-1) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \right). \tag{2.11}$$

Rata-rata untuk distribusi PIG adalah

$$E(Y) = E\{E(Y | \mu\nu)\} = E(\mu\nu) = \mu. \tag{2.12}$$

Varians untuk distribusi PIG adalah

$$Var(Y) = Var\{E(Y | \mu\nu)\} + E\{Var(Y | \mu\nu)\} = \mu + \tau\mu^2. \tag{2.13}$$

Y merupakan sejumlah kejadian pada suatu unit observasi dalam suatu kurun waktu tertentu dan μ adalah rata-rata kejadian tersebut. Sementara τ merupakan parameter overdispersi dan sama dengan $Var(v)$, yang disebabkan karena terdapatnya heterogenitas atau keragaman yang berkaitan dengan unit observasi dengan karakter tertentu (Dean, Lawless dan Willmot, 1989a).

2.5. Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)

Misalkan ingin diketahui hubungan antara suatu variabel respon Y dengan k buah variabel prediktor X_1, X_2, \dots, X_k maka model regresi untuk menggambarkan hubungan tersebut adalah sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.14)$$

dimana $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ merupakan parameter-parameter yang tidak diketahui dan ε_i menyatakan *error* untuk pengamatan ke- i , maka bila dinyatakan dalam vektor adalah sebagai berikut :

$$y_i = \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, \quad (2.15)$$

dimana

x adalah variabel prediktor yang dinotasikan sebagai berikut :

$$\mathbf{x}_i^T = [1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{ki}],$$

$\boldsymbol{\beta}$ adalah parameter regresi yang dinotasikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_k]^T,$$

dan nilai ekspektasinya adalah

$$\begin{aligned} E(y_i) &= E(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}) + E(\varepsilon_i), \\ \mu_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Atau bila dinyatakan dalam vektor menjadi

$$\mu_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i. \quad (2.17)$$

Tapi model ini tidak sesuai bila diterapkan pada variabel Y yang berdistribusi poisson inverse gaussian (PIG). Variabel Y pada model (2.17) di atas dapat berupa bilangan riil pada interval $(-\infty, \infty)$, sementara nilai Y pada model PIG berupa bilangan bulat non-negatif. Untuk mengatasi hal tersebut, maka digunakan sebuah fungsi penghubung log natural (ln) dari *mean* menggunakan model linier, sehingga $\eta = \ln(\mu_i)$, akibatnya hubungan antara variabel respon dengan kombinasi linier variabel prediktor adalah

$$\ln \mu_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \text{ atau } \mu_i = e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}. \quad (2.18)$$

Dalam model ini koefisien regresi β_j menggambarkan ekspektasi perubahan dalam ln dari rata-rata per unit perubahan dari prediktor x_j . Dengan kata lain, peningkatan x_j tiap satu unit berhubungan dengan peningkatan β_j dalam ln rata-ratanya.

2.6. Estimasi Parameter Regresi PIG

Persamaan (2.18) merupakan model regresi PIG dan parameter β pada regresi PIG ditaksir dengan metode *maximum likelihood*. Langkahnya adalah dengan menentukan fungsi *likelihood* dari distribusi PIG sebagai berikut :

$$L(\beta; \tau) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i | \mathbf{x}_i; \beta; \tau),$$

$$L(\beta; \tau) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\mu_i^{y_i} e^{-\frac{1}{\tau}}}{y_i!} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu_i\tau + 1)^{-\frac{(y_i-1)}{2}} K_{s_i}(z_i) \right\}. \quad (2.19)$$

Fungsi *likelihood* tersebut diubah kedalam bentuk logaritma natural (\ln), sehingga persamaannya menjadi sebagai berikut :

$$l(\beta; \tau) = \ln L(\beta; \tau)$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T \beta + \frac{n}{\tau} - \ln \left(\sum_{i=1}^n y_i! \right) + \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) - \frac{n}{2} \ln \tau$$

$$- \sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i - 1}{4} \right) \ln (2\mathbf{x}_i^T \beta \tau + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i).$$

(2.20)

Kemudian ditentukan turunan pertama dan turunan kedua terhadap parameter β dan τ dari persamaan (2.20).

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T \beta + \frac{n}{\tau} - \ln \left(\sum_{i=1}^n y_i! \right) + \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) - \frac{n}{2} \ln \tau \right)}{\frac{\partial}{\partial \beta} \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i - 1}{4} \right) \ln (2\mathbf{x}_i^T \beta \tau + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i) \right)} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T \beta + \frac{n}{\tau} - \ln \left(\sum_{i=1}^n y_i! \right) + \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) - \frac{n}{2} \ln \tau \right)}{\frac{\partial}{\partial \tau} \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i - 1}{4} \right) \ln (2\mathbf{x}_i^T \beta \tau + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i) \right)} = 0 \quad (2.22)$$

Selanjutnya dari persamaan (2.21) ditentukan turunan terhadap β yaitu

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^T \partial \beta} = \frac{\partial \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \right)}{\partial \beta} \text{ dan } \tau \text{ yaitu } \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \right)}{\partial \tau}. \text{ Dari persamaan (2.22) juga}$$

$$\text{ditentukan turunan terhadap } \tau \text{ yaitu } \frac{\partial^2 l}{\partial \tau^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial l}{\partial \tau} \right)}{\partial \tau}.$$

Apabila persamaan di atas persamaan implisit dan non linier dalam parameter β dan τ sehingga untuk mendapatkan taksiran dari parameter $\theta = [\beta^T \ \tau]^T$, fungsi dimaksimumkan dengan menggunakan *Fisher Scoring Algorithm*, dengan persamaan sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_{(r+1)} = \hat{\theta}_{(r)} + \mathbf{I}^{-1}(\hat{\theta}_{(m)}) \mathbf{D}(\hat{\theta}_{(m)}), \quad (2.23)$$

dimana $\mathbf{I}(\hat{\theta}_{(m)}) = -E[\mathbf{H}(\hat{\theta}_{(m)})]$ dan $\mathbf{I}(\hat{\theta}_{(m)})$ adalah matriks informasi *Fisher* berukuran $(k+1) \times (k+1)$ (Ummah, Suliyanto dan Sediono, 2013).

Untuk mendapatkan estimasi parameter, *Fisher Scoring Algorithm* kemudian digunakan dalam dua algoritma yang digunakan dalam *Package Gamlss* yaitu algoritma Rigby Stasinopoulos (*RS algorithm*) dan algoritma Cole Green (*CG algorithm*). *RS algorithm* merupakan generalisasi dari algoritma yang digunakan Rigby dan Stasinopoulos (1996) dalam melakukan *fitting* terhadap *Mean and Dispersion Additive Models* (MADAM), dimana tidak menggunakan turunan silang dari fungsi *likelihood*. Sementara itu *CG algorithm* merupakan generalisasi dari algoritma yang digunakan oleh Cole dan Green (1992) dimana menggunakan turunan pertama, turunan kedua dan turunan silang dari fungsi *likelihood* terhadap parameter distribusi (Rigby dan Stasinopoulos, 2007).

2.7. Pengujian Parameter Regresi PIG

Pengujian parameter pada regresi poisson inverse gaussian (PIG) dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) meliputi pengujian hipotesis secara serentak pada parameter β serta pengujian

parsial parameter β dan τ . Masing-masing pengujian beserta hipotesis dan statistik *likelihood ratio* yang digunakan akan dijelaskan sebagai berikut :

2.7.1. Pengujian hipotesis secara serentak pada parameter β

Parameter yang diuji pada pengujian ini mencakup seluruh parameter β secara bersama-sama dengan hipotesis sebagai berikut

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_l \neq 0 \text{ dengan } l = 1, 2, \dots, k.$$

Statistik uji yang digunakan adalah ukuran statistik *likelihood ratio* yang dibentuk dengan menentukan himpunan parameter di bawah populasi (Ω) yaitu $\Omega = (\beta, \tau)$ dan himpunan parameter di bawah H_0 benar (ω) yaitu $\omega = (\beta_0, \tau_\omega)$. Pada himpunan parameter di bawah populasi, dibentuk fungsi *likelihood* untuk model penuh (*saturated*) yang melibatkan seluruh variabel prediktor $L(\Omega)$. Sedangkan pada himpunan parameter di bawah H_0 benar, dibentuk fungsi *likelihood* untuk model yang tidak melibatkan variabel prediktor $L(\omega)$. Kedua fungsi tersebut adalah sebagai berikut :

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i | \mathbf{x}_i; \beta, \tau) \quad (2.24)$$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i | \beta_0, \tau_\omega). \quad (2.25)$$

Kedua fungsi *likelihood* tersebut dibandingkan dalam bentuk *devians* berikut :

$$G = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) \quad (2.26)$$

$$= 2 \left(\ln(L(\hat{\Omega})) - \ln(L(\hat{\omega})) \right).$$

Nilai $L(\hat{\omega})$ dan $L(\hat{\Omega})$ merupakan nilai *maximum likelihood* untuk masing-masing model dimana $\hat{\beta}$ dan $\hat{\tau}$ merupakan hasil estimasi pada

subbab 2.6. Statistik G adalah pendekatan dari distribusi chi square χ^2 dengan derajat bebas ν sehingga kriteria pengujianya adalah tolak H_0 apabila $G_{hitung} > \chi^2_{(\alpha, \nu)}$ dimana ν adalah derajat bebas yang diperoleh dari jumlah parameter di bawah populasi dikurangi jumlah parameter di bawah H_0 .

2.7.2. Pengujian hipotesis parameter β secara parsial

Apabila H_0 ditolak pada pengujian serentak di atas maka selanjutnya dilakukan pengujian hipotesis secara parsial dengan hipotesis sebagai berikut :

Hipotesis untuk menguji signifikansi parameter β

$$H_0 : \beta_l = 0$$

$$H_1 : \beta_l \neq 0 \text{ dengan } l = 1, 2, \dots, k$$

Statistik uji yang digunakan dalam pengujian signifikansi parameter β adalah sebagai berikut :

$$Z = \frac{\hat{\beta}_l}{SE(\hat{\beta}_l)}. \quad (2.27)$$

Kriteria pengujianya adalah tolak H_0 apabila $|Z_{hitung}|$ lebih besar dari nilai $Z_{\alpha/2}$ dimana α adalah tingkat signifikansi yang digunakan. $SE(\hat{\beta}_l)$ merupakan elemen diagonal diperoleh dari elemen diagonal utama ke- $(m+2)$ dari matriks varians dan kovarians yang diperoleh dari persamaan

$$Cov(\hat{\theta}) = -(\mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta})).$$

Pengujian parameter τ

Hipotesis untuk menguji signifikansi parameter τ

$$H_0 : \tau = 0$$

$$H_1 : \tau \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan dalam pengujian signifikansi parameter τ adalah sebagai berikut :

$$Z = \frac{\hat{\tau}}{SE(\hat{\tau})}. \quad (2.28)$$

Kriteria pengujiannya adalah tolak H_0 apabila $|Z_{hitung}|$ lebih besar dari nilai $Z_{\alpha/2}$ dimana α adalah tingkat signifikansi yang digunakan.

2.8. Kemencengan (*Skewness*)

Seperti yang dijelaskan di atas, bahwa model regresi PIG sangat cocok untuk data yang cenderung menceng kanan. Kemencengan (*skewness*) dapat dihitung dari :

$$\text{Skewness} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^3}{(N-1)s^3}, \quad (2.29)$$

dimana Y_i adalah jumlah terjadinya suatu kejadian dalam periode waktu tertentu, s adalah standar deviasi dan N adalah jumlah unit observasi. Nilai negatif dan positif dari *skewness* mengindikasikan bahwa data menceng kiri atau menceng kanan. Suatu distribusi dikatakan sangat menceng bila nilai absolut dari *skewness* lebih dari satu (Bulmer, 1979 dalam Zha, Lord dan Zou, 2014).

2.9. Uji Korelasi

Korelasi terjadi diantara dua variabel dimana suatu nilai variabel berhubungan dengan nilai variabel lainnya. Salah satu cara untuk melihat hubungan diantara dua variabel adalah dengan melihat nilai koefisien korelasi, yaitu suatu nilai yang mengukur kekuatan hubungan antara dua variabel. Koefisien korelasi biasanya mengacu pada koefisien korelasi momen-produk Pearson, sesuai nama orang yang mengembangkannya yaitu Pearson. Koefisien korelasi Pearson diperoleh dengan membagi kovarians kedua variabel dengan perkalian simpangan bakunya dengan persamaan sebagai berikut :

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}}. \quad (2.30)$$

Nilai koefisien korelasi Pearson berkisar diantara -1 sampai 1. Kedua variabel dikatakan memiliki hubungan yang erat bila nilai korelasi mendekati 1, baik itu positif maupun negatif. Namun bila nilai korelasi 0 menunjukkan bahwa kedua variabel tidak memiliki hubungan erat. Nilai korelasi yang positif menunjukkan adanya hubungan berbanding lurus diantara kedua variabel tersebut, sebaliknya hubungan yang berbanding terbalik terlihat dari nilai korelasi yang negatif (Triola, 2010).

Pengujian hipotesisnya adalah sebagai berikut :

H_0 : Tidak ada hubungan antar kedua variabel

H_1 : Terdapat hubungan antar kedua variabel

Statistik uji yang digunakan adalah

$$T = \frac{r_{x,y} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (2.31)$$

$$\text{dimana } r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Keputusan tolak H_0 jika $t_{hitung} > t_{\alpha/2, v}$.

2.10. Multikolinearitas

Dalam pemodelan regresi, korelasi antara variabel-variabel prediktor disebut dengan multikolinearitas. Ini merupakan salah satu masalah dalam analisis regresi, karena bila beberapa prediktor berkorelasi maka akan sulit membedakan pengaruh dari masing-masing variabel. Korelasi antar variabel prediktor akan menyebabkan determinan matriks $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ sama dengan nol sehingga invers matriks tersebut tidak ada dan pendugaan parameter tidak akan diperoleh. Salah satu cara untuk mendeteksi terjadinya multikolinearitas adalah dengan melihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF), yaitu nilai yang menggambarkan kenaikan varians dari dugaan parameter antar variabel prediktor, dan dirumuskan dalam persamaan sebagai berikut :

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2}, \quad (2.32)$$

dimana R_j^2 adalah koefisien determinasi antara x_j dengan variabel prediktor lainnya. Apabila nilai VIF lebih dari 10 maka dapat dikatakan terjadi multikolinearitas. Dan bila nilai VIF kurang dari 10 maka dapat dikatakan tidak terjadi multikolinearitas dan pemodelan regresi dapat dilanjutkan.

2.11. Akaike Information Criterion (AIC)

Dalam analisis data, beberapa model bisa digunakan dalam suatu set data. Beberapa kriteria untuk perbandingan model telah banyak diperkenalkan oleh berbagai literatur. Salah satunya adalah *Akaike Information Criterion* (AIC). AIC memperkirakan kualitas masing-masing model, relatif terhadap model lain sehingga AIC merupakan sarana dalam melakukan pemilihan model.

Misalkan L adalah nilai maksimum dari fungsi *likelihood* suatu model, dan k adalah jumlah parameter yang diestimasi dalam model tersebut. Maka nilai AIC dari model tersebut adalah sebagai berikut :

$$AIC = 2k - 2\ln(L). \quad (2.33)$$

Bila diberikan beberapa model untuk sebuah set data, maka model yang lebih baik adalah model dengan nilai AIC lebih kecil.

2.12. Koefisien Korelasi Filliben

Koefisien Korelasi *Filliben* merupakan koefisien korelasi dari plot distribusi normal sebagai suatu uji statistik di bawah hipotesis bahwa data berdistribusi normal. Uji statistik yang digunakan yaitu koefisien korelasi plot distribusi normal r_f didefinisikan sebagai koefisien korelasi moment antara pengamatan Y_i yang diurutkan dengan median M_i yang diurutkan dari distribusi normal standar :

$$\begin{aligned} r_f &= \text{Corr}(X, M) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(M_i - \bar{M})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Koefisien korelasi r_f di atas didasari bahwa bila sebuah data dikatakan berdistribusi normal bila plot data tersebut akan cenderung mendekati plot distribusi normal yang kemudian tercermin dari nilai koefisien korelasi plotnya (Filliben, 1975). Suatu data dapat dikatakan berdistribusi normal bila nilai uji statistiknya lebih kecil dari nilai tabel koefisien korelasi *Filliben* pada tingkat signifikansi yang ditentukan (Ryan dan Joiner, 1976).

2.13. Jumlah Kasus Baru HIV dan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi

HIV dan AIDS merupakan dua hal yang sering dianggap sama, padahal terdapat perbedaan diantara keduanya. HIV atau *Human Immunodeficiency Virus* adalah sejenis virus yang menyerang/menginfeksi sel darah putih yang menyebabkan turunnya kekebalan tubuh manusia. Virus ini menyerang limfosit CD4 yaitu sistem kekebalan tubuh. Virus ini ditularkan dari manusia yang terinfeksi kepada kelompok manusia yang sehat sehingga menyebabkan kerusakan besar pada tingkat kekuatan pada kekebalan tubuhnya. AIDS atau *Acquired Immune Deficiency Syndrome* adalah sekumpulan gejala penyakit yang timbul karena turunnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi HIV. Penderita HIV yang tidak menjalani pengobatan antivirus akan lebih cepat berkembang menjadi AIDS. HIV AIDS pertama kali ditemukan di Propinsi Bali pada tahun 1987 dan hingga saat ini sudah menyebar di 386 kabupaten/kota di seluruh propinsi di Indonesia. Lima besar kasus HIV terbanyak ada Propinsi DKI Jakarta, Jawa Timur, Jawa Barat, Bali dan Sumatera Utara (Pusdatin Kemenkes, 2014).

Kasus HIV diperoleh dari laporan klinik *Voluntary Counseling and Testing* (VCT) di masing-masing Unit Pelayanan Kesehatan (UPK) baik itu di rumah sakit maupun puskesmas. VCT merupakan pintu masuk penting untuk pencegahan dan perawatan HIV bagi mereka yang merasa beresiko tertular HIV dan dilakukan secara sukarela. Pemeriksaan dini ini ditujukan untuk memotong penyebaran penyakit HIV/AIDS. Perkembangan kasus HIV di Propinsi Jawa Timur dari tahun 2009 sampai tahun 2013 menunjukkan kecenderungan yang meningkat, sementara kasus AIDS dan kematian yang disebabkan AIDS

menunjukkan kecenderungan menurun. Deteksi terhadap kasus HIV dapat mencegah penyebaran virus ini dan mencegah perkembangannya menjadi AIDS yang dapat menyebabkan kematian.

Jumlah kasus baru HIV dan jumlah kasus HIV dalam suatu waktu merupakan dua hal yang berbeda, karena jumlah kasus baru HIV merupakan jumlah orang yang baru diketahui terinfeksi virus HIV sementara jumlah kasus HIV merupakan jumlah kasus kumulatif HIV dari beberapa tahun sebelumnya. Jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur pada tahun 2013 mengalami peningkatan yaitu mencapai 4.661 kasus dibandingkan tahun 2012 sebanyak 3.698 kasus.

Pada tahun 2013, kasus HIV di Propinsi Jawa Timur didominasi kelompok umur seksual aktif yakni kelompok umur 25-29 tahun dengan 2.149 kasus dan kelompok umur 30-34 tahun sebanyak 1.940 kasus. Selain itu, penularan HIV pada kelompok orang dewasa terjadi melalui hubungan heteroseksual antara orang yang terinfeksi HIV dengan orang yang belum terinfeksi sehingga penggunaan kondom setiap melakukan hubungan seks dapat meminimalisir penyebaran virus HIV.

Berbagai upaya dilakukan pemerintah dalam rangka menghambat penyebaran kasus HIV, diantaranya dengan meningkatkan kualitas pelayanan kesehatan melalui penambahan fasilitas kesehatan dan tenaga kesehatan. Ketersediaan tenaga kesehatan yang terlatih dan jumlah yang memadai diharapkan mampu mengidentifikasi kasus HIV lebih cepat dan mendapatkan pelayanan kesehatan yang baik sehingga kegiatan preventif dapat lebih cepat dilakukan.

Status sosial ekonomi seseorang dapat mempengaruhi kemungkinan seseorang terjangkit virus HIV. Status sosial ekonomi menjadi faktor kunci dalam menentukan kualitas hidup bagi individu setelah mereka terkena virus dan mereka dengan sumber daya yang lebih rendah cenderung mengalami ketertinggalan dengan pengobatan yang terbatas.

HIV merupakan suatu penyakit yang banyak tertanam dalam ketimpangan sosial ekonomi yang mengakibatkan mereka dengan status sosial ekonomi yang rendah memiliki resiko terjangkit HIV (Whiteside, 2002). Kemiskinan yang

membelenggu membuat sebagian orang memilih pekerjaan yang beresiko terjangkit HIV seperti para pekerja seks komersil. Selain itu, kemiskinan dapat membatasi seseorang pada beberapa sumber informasi yang berkaitan dengan pencegahan-pencegahan HIV. Tingkat pendidikan seseorang juga dapat menggambarkan tingkat pengetahuan mengenai cara pencegahan penularan HIV. Hasil Suvey Demografi dan Kesehatan Indonesia (SDKI) tahun 2012 menunjukkan bahwa pengetahuan mengenai HIV dan cara-cara pencegahannya berbeda menurut tingkat pendidikan tertinggi yang ditamatkan. Pengetahuan mengenai HIV/AIDS dan cara-cara pencegahannya meningkat seiring meningkatnya tingkat pendidikan seseorang. Seseorang dengan tingkat pendidikan SLTA ke atas cenderung lebih banyak tahu tentang HIV/AIDS dan cara-cara pencegahannya.

2.14. Hasil Penelitian Tentang HIV

Selama kurun waktu beberapa tahun terakhir terdapat banyak penelitian baik dalam negeri maupun luar negeri mengenai HIV dan faktor-faktor yang mempengaruhinya.

Zanakis, Alvarez dan Li (2007) melakukan penelitian tentang pengaruh aspek sosial dan ekonomi terhadap epidemi HIV/AIDS di negara-negara di dunia. Penelitian tersebut menyimpulkan bahwa negara dengan kepadatan penduduk lebih rendah yang menyediakan pelayanan kesehatan lebih baik dan nilai PDB yang lebih besar merupakan negara-negara dengan epidemi dan resiko HIV/AIDS lebih rendah. Sementara itu, Olewe, Wayung dan Makau (2008) melakukan penelitian mengenai karakteristik klien-klien yang memeriksakan diri ke klinik VCT di Nairobi, Kenya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sebagian besar dari mereka berusia 20-34 tahun dan memiliki pendidikan SLTP ke atas. Penelitian lainnya tentang HIV adalah penelitian Owusu (2011) yang memodelkan pengaruh faktor demografi seperti umur dan jenis kelamin terhadap jumlah kasus HIV di sebuah rumah sakit di Ghana dengan menggunakan regresi poisson serta regresi binomial negatif dan menghasilkan kesimpulan bahwa umur dan jenis kelamin berpengaruh terhadap jumlah penderita HIV.

Penelitian luar lainnya yang mengaitkan status sosial ekonomi dengan HIV adalah penelitian Ogunmola, Oladosu dan Olamoyegun (2014). Penelitian tersebut mengaitkan status sosial ekonomi seperti status pekerjaan, tingkat pendidikan, pendapatan bulanan dan status perkawinan dengan resiko HIV di Nigeria. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa prevalensi infeksi HIV terkonsentrasi pada mereka dengan pendidikan SLTP ke bawah dan pendapatan rendah.

Beberapa penelitian dalam negeri tentang HIV/AIDS diantaranya penelitian mengenai HIV pernah dilakukan Susilo (2009) berkaitan tentang prevalensi dan faktor resiko HIV di daerah Papua. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi status HIV di masing-masing daerah topografi berbeda di Papua. Faktor-faktor yang signifikan pada wilayah pegunungan adalah penghasilan rendah, penghasilan sedang, pengetahuan sangat rendah, usia pertama kali berhubungan seks saat remaja (17-24 tahun), jumlah pasangan lebih dari satu, melakukan seks komersial dan seks terakhir tidak mengenakan kondom. Di Pesisir mudah epidemi HIV/AIDS lebih dikarenakan oleh suku, pendidikan dan ketersediaan kondom. Sedangkan di pesisir sulit faktornya adalah jenis kelamin dan minimnya penggunaan kondom.

Penelitian yang berkaitan dengan faktor-faktor yang mempengaruhi HIV dan AIDS di Propinsi Jawa Timur pernah dilakukan oleh Ratnasari dan Purhadi (2013) dengan menggunakan model regresi *Bivariate Poisson*. Penelitian tersebut menghasilkan bahwa persentase penduduk tamat SMA, persentase pengguna kondom, persentase penduduk kelompok umur 25-29 tahun, persentase daerah berstatus desa dan persentase penduduk miskin merupakan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah HIV dan AIDS di Propinsi Jawa Timur.

Penelitian mengenai karakteristik sosial demografi dari para penderita HIV/AIDS di klinik VCT juga pernah dilakukan di Indonesia. Salah satunya adalah penelitian oleh Susila (2013) di klinik VCT RSUD Sanjiwani Gianyar Bali dan menghasilkan penelitian bahwa sebagian besar ODHA (Orang dengan HIV/AIDS) di klinik tersebut berada pada usia produktif yaitu kelompok umur 20-44 tahun dengan pendidikan SLTA ke atas. Gambaran yang sama juga terjadi pada hasil penelitian Hutapea, Sarumpaet dan Rasmaliah (2013) di klinik VCT

yang berbeda yaitu di klinik VCT RSUD HKBP Balige Sumatera Utara, dimana sebagian besar ODHA berpendidikan SLTA ke atas.

Penelitian yang sama juga pernah dilakukan oleh Umami (2015) di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Pada penelitian tersebut menggunakan model regresi *Bivariate Zero Inflated Poisson* dikarenakan data jumlah kasus HIV dan AIDS mengalami overdispersi dan persentase kelompok umur 25-29 tahun, persentase penduduk dengan pendidikan SMA dan persentase pengguna kondom merupakan faktor-faktor yang signifikan mempengaruhi jumlah HIV dan AIDS.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data sekunder mengenai jumlah kasus baru HIV dan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV. Data diambil dari Profil Kesehatan Propinsi Jawa Timur yang dikeluarkan Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur dan Publikasi Hasil Survey Sosial Ekonomi Nasional (Susenas) yang dikeluarkan oleh Badan Pusat Statistik (BPS) Propinsi Jawa Timur. Data tersebut merupakan data pada tahun 2013. Sementara itu, unit pengamatan yang diambil adalah pada tingkat kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur yang terdiri dari 38 kabupaten/kota.

3.2. Variabel Penelitian

Variabel respon yang dimodelkan dalam penelitian ini adalah jumlah kasus baru HIV. Sementara itu, variabel prediktor yang merupakan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV, yaitu :

- X_1 = Persentase penduduk miskin di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013
- X_2 = Persentase penduduk dengan pendidikan tertinggi SLTA ke atas di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013
- X_3 = Persentase pasangan usia subur yang sedang menggunakan alat KB kondom di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013
- X_4 = Rasio jumlah tenaga kesehatan per 100.000 penduduk di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013
- X_5 = Rasio jumlah fasilitas kesehatan per 100.000 penduduk di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013
- X_6 = Persentase daerah perkotaan di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013
- X_7 = Persentase penduduk usia 25-34 tahun di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013

Tabel 3.1 Variabel Penelitian, Definisi Operasional, dan Tipe Data

Variabel	Definisi Operasional	Tipe Data
Jumlah kasus baru HIV (Y)	Jumlah kasus baru HIV di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	<i>Count</i>
Persentase penduduk miskin (X_1)	Perbandingan antara jumlah penduduk dengan pengeluaran perkapita di bawah garis kemiskinan (GK) terhadap jumlah total penduduk dikalikan 100 di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	Kontinu
Persentase penduduk dengan pendidikan tertinggi SLTA ke atas (X_2)	Perbandingan antara jumlah penduduk usia 10 tahun ke atas dengan pendidikan tertinggi SLTA ke atas terhadap jumlah total penduduk usia 10 tahun ke atas dikalikan 100 di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	Kontinu
Persentase pasangan usia subur yang sedang menggunakan alat KB kondom (X_3)	Perbandingan antara jumlah pasangan usia subur yang sedang menggunakan alat KB kondom terhadap jumlah total pasangan usia subur dikalikan 100 di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	Kontinu
Rasio jumlah tenaga kesehatan per 100.000 penduduk (X_4)	Perbandingan jumlah tenaga kesehatan terhadap jumlah penduduk dikalikan 100.000 di tiap kabupaten kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	Kontinu

Lanjutan tabel 3.1.

Variabel	Definisi Operasional	Tipe Data
Rasio jumlah fasilitas kesehatan per 100.000 penduduk (X_5)	Perbandingan jumlah fasilitas kesehatan terhadap jumlah penduduk dikalikan 100.00 di tiap kabupaten kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	Kontinu
Persentase daerah perkotaan (X_6)	Perbandingan jumlah desa/kelurahan yang berstatus daerah perkotaan terhadap jumlah total desa/kelurahan dikalikan 100 di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	Kontinu
Persentase penduduk usia 25-34 tahun (X_7)	Perbandingan jumlah penduduk usia 25-34 tahun terhadap jumlah penduduk total dikalikan 100 di kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur tahun 2013	Kontinu

Sumber : Profil Kesehatan Propinsi Jawa Timur tahun 2013 dan Publikasi Hasil Survey Sosial Ekonomi Nasional Propinsi Jawa Timur tahun 2013.

Dengan struktur data untuk penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Struktur Data dalam Penelitian

Wilayah	Y_1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1	y_1	$x_{1.1}$	$x_{2.1}$	$x_{3.1}$	$x_{4.1}$	$x_{5.1}$	$x_{6.1}$	$x_{7.1}$
2	y_2	$x_{1.2}$	$x_{2.2}$	$x_{3.2}$	$x_{4.2}$	$x_{5.2}$	$x_{6.2}$	$x_{7.2}$
3	y_3	$x_{1.3}$	$x_{2.3}$	$x_{3.3}$	$x_{4.3}$	$x_{5.3}$	$x_{6.3}$	$x_{7.3}$
4	y_4	$x_{1.4}$	$x_{2.4}$	$x_{3.4}$	$x_{4.4}$	$x_{5.4}$	$x_{6.4}$	$x_{7.4}$
4	y_5	$x_{1.5}$	$x_{2.5}$	$x_{3.5}$	$x_{4.5}$	$x_{5.5}$	$x_{6.5}$	$x_{7.5}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
38	y_{38}	$x_{1.38}$	$x_{2.38}$	$x_{3.38}$	$x_{4.38}$	$x_{5.38}$	$x_{6.38}$	$x_{7.38}$

3.3. Metode Penelitian

Berikut ini adalah langkah-langkah dalam analisis data untuk setiap tujuan penelitian:

3.3.1. Langkah-langkah untuk mendapatkan taksiran parameter model regresi poisson inverse gaussian (PIG)

1. Membentuk fungsi *likelihood* berdasarkan distribusi PIG

$$L(\boldsymbol{\beta}; \tau) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta}; \tau).$$

2. Membentuk fungsi \ln *likelihood* dari fungsi *likelihood*

$$l = \ln(L(\boldsymbol{\beta}; \tau)).$$

3. Mencari turunan pertama fungsi logaritma natural *likelihood* dibawah populasi dan disamadengankan nol

$$\left[\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T = \vec{0}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T & \tau \end{bmatrix}^T.$$

4. Memaksimumkan turunan kedua fungsi logaritma natural *likelihood* dibawah populasi (definit negatif)

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}.$$

5. Jika pada langkah sebelumnya dihasilkan persamaan yang tidak close form maka untuk mendapatkan penaksir parameter fungsi dimaksimumkan dengan *Fisher Scoring Algorithm*, dengan persamaan sebagai berikut ::

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r)} + \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}),$$

$$\text{dimana } \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) = -E[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})]$$

Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan nilai taksiran parameter pada saat iterasi ke- m dan

$\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$ merupakan vektor gradien dengan parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$. Taksiran awal parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS).

Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\|\hat{\theta}_{(m+1)} - \hat{\theta}_{(m)}\| \leq \varepsilon$ dan $\varepsilon > 0$ sangat kecil.

3.3.2. Pengujian Hipotesis pada model regresi poisson inverse gaussian (PIG) menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT)

a. Pengujian serentak parameter β

1. Menentukan hipotesis

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_l \neq 0 \text{ dengan } l = 1, 2, \dots, k.$$

2. Membuat himpunan parameter dibawah populasi

$$\Omega = (\beta, \tau)$$

$$\Omega = (\beta_1, \dots, \beta_k, \tau \mid -\infty < \beta_l < \infty, \tau > 0; l = 1, 2, \dots, k).$$

3. Membuat fungsi *likelihood* di bawah populasi ($L(\Omega)$)

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i \mid \mathbf{x}_i; \beta, \tau)$$

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} (L(\Omega)).$$

$L(\hat{\Omega})$ adalah nilai *maximum likelihood* untuk model lengkap dimana melibatkan variabel prediktor.

4. Membuat himpunan parameter dibawah H_0 benar ω

$$\omega = \{\beta_0, \tau_{\omega} \mid -\infty < \beta_0 < \infty\}.$$

5. Membuat fungsi *likelihood* di bawah H_0 benar ($L(\omega)$)

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i \mid \beta_0, \tau_{\omega})$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} (L(\omega)).$$

$L(\hat{\omega})$ adalah nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor.

6. Menentukan statistik uji dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT)

$$G = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) \\ = 2 \left(\ln \left(L(\hat{\Omega}) \right) - \ln \left(L(\hat{\omega}) \right) \right).$$

7. Menentukan daerah penolakan H_0

Kriteria pengujiannya adalah tolak H_0 apabila $G_{hitung} > \chi^2_{(\alpha, v)}$ dimana v adalah derajat bebas yang diperoleh dari jumlah parameter di bawah populasi dikurangi jumlah parameter di bawah H_0 .

b. Pengujian hipotesis secara parsial parameter β

1. Hipotesis untuk menguji signifikansi parameter β

$$H_0 : \beta_l = 0$$

$$H_1 : \beta_l \neq 0 \text{ dengan } l = 1, 2, \dots, k.$$

2. Menentukan statistik uji.

$$Z = \frac{\hat{\beta}_l}{SE(\hat{\beta}_l)}.$$

3. Menentukan daerah penolakan H_0

Tolak H_0 apabila $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$ dimana α adalah tingkat signifikansi yang digunakan.

c. Pengujian hipotesis parameter τ

1. Hipotesis untuk menguji signifikansi parameter τ

$$H_0 : \tau = 0$$

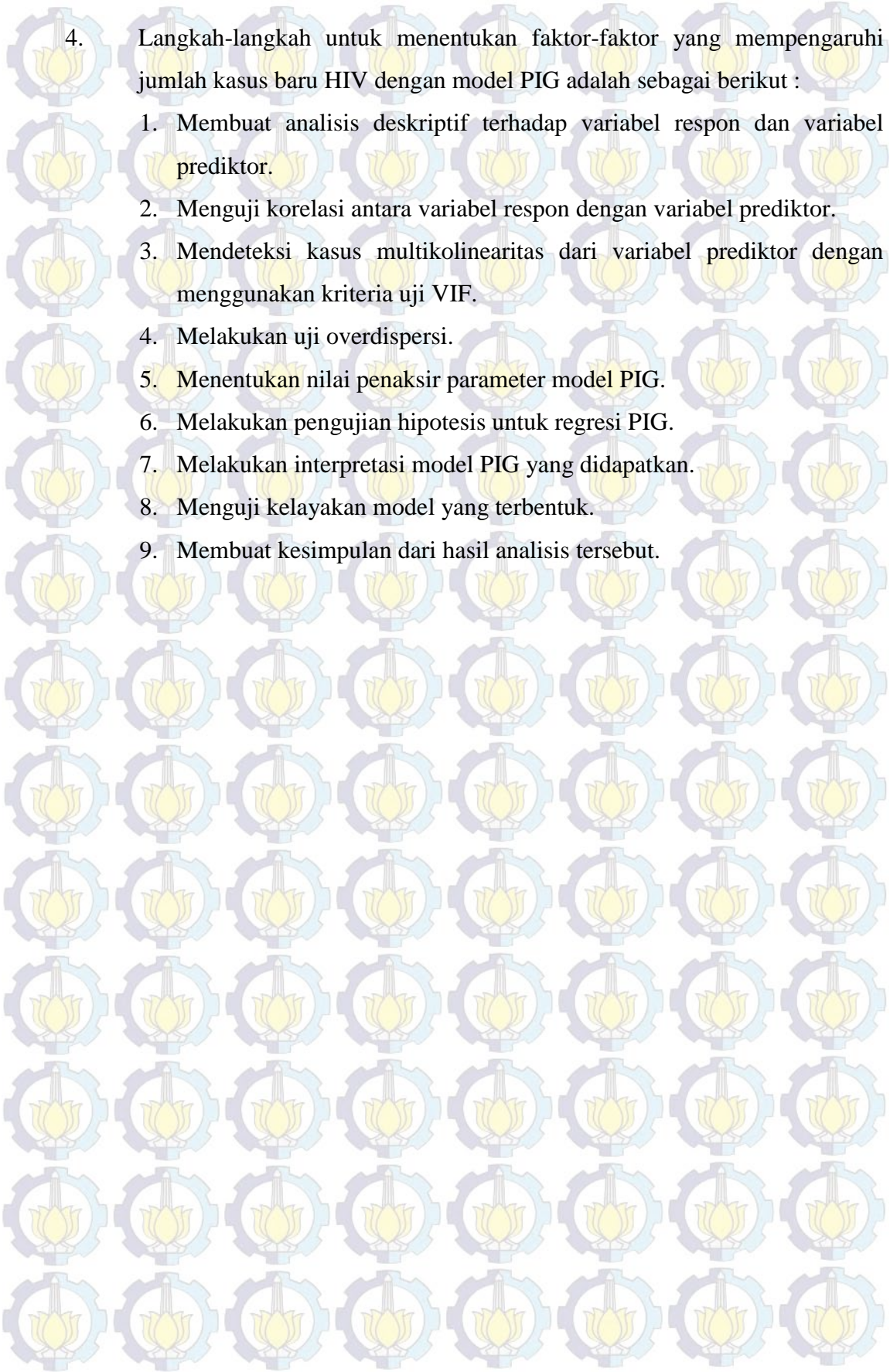
$$H_1 : \tau \neq 0$$

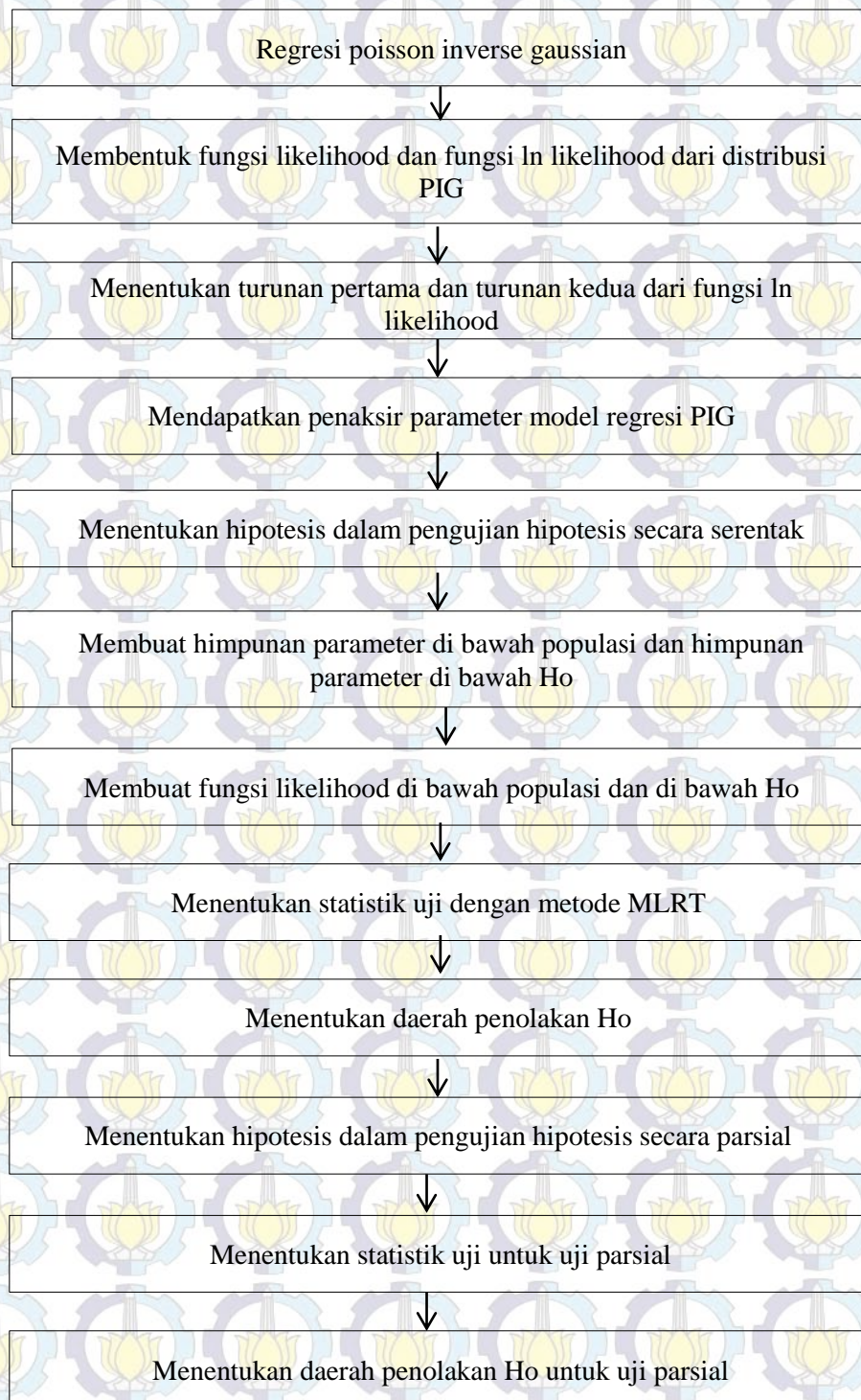
2. Menentukan statistik uji.

$$Z = \frac{\hat{\tau}}{SE(\hat{\tau})}.$$

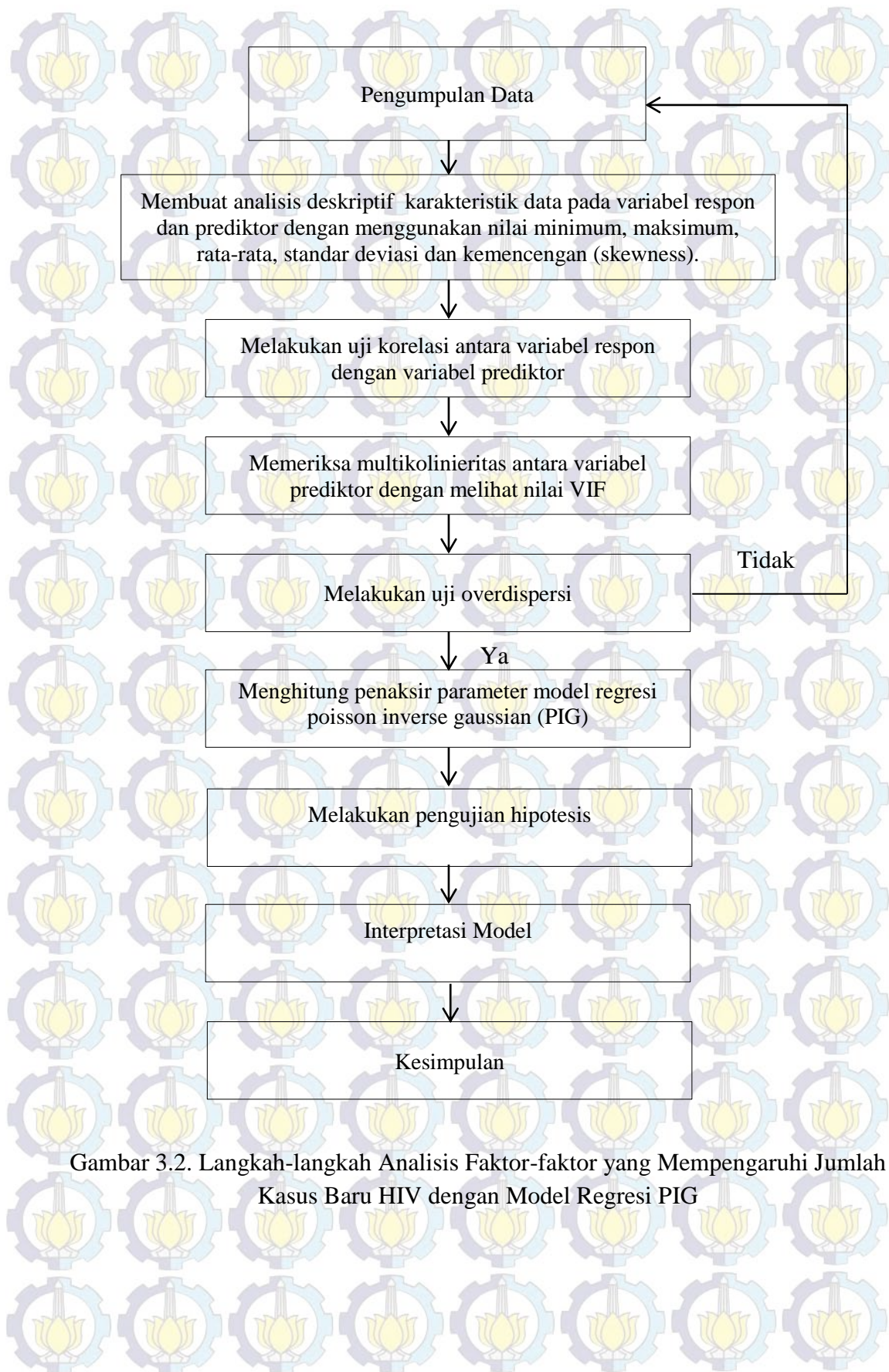
3. Menentukan daerah penolakan H_0

Tolak H_0 apabila $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$

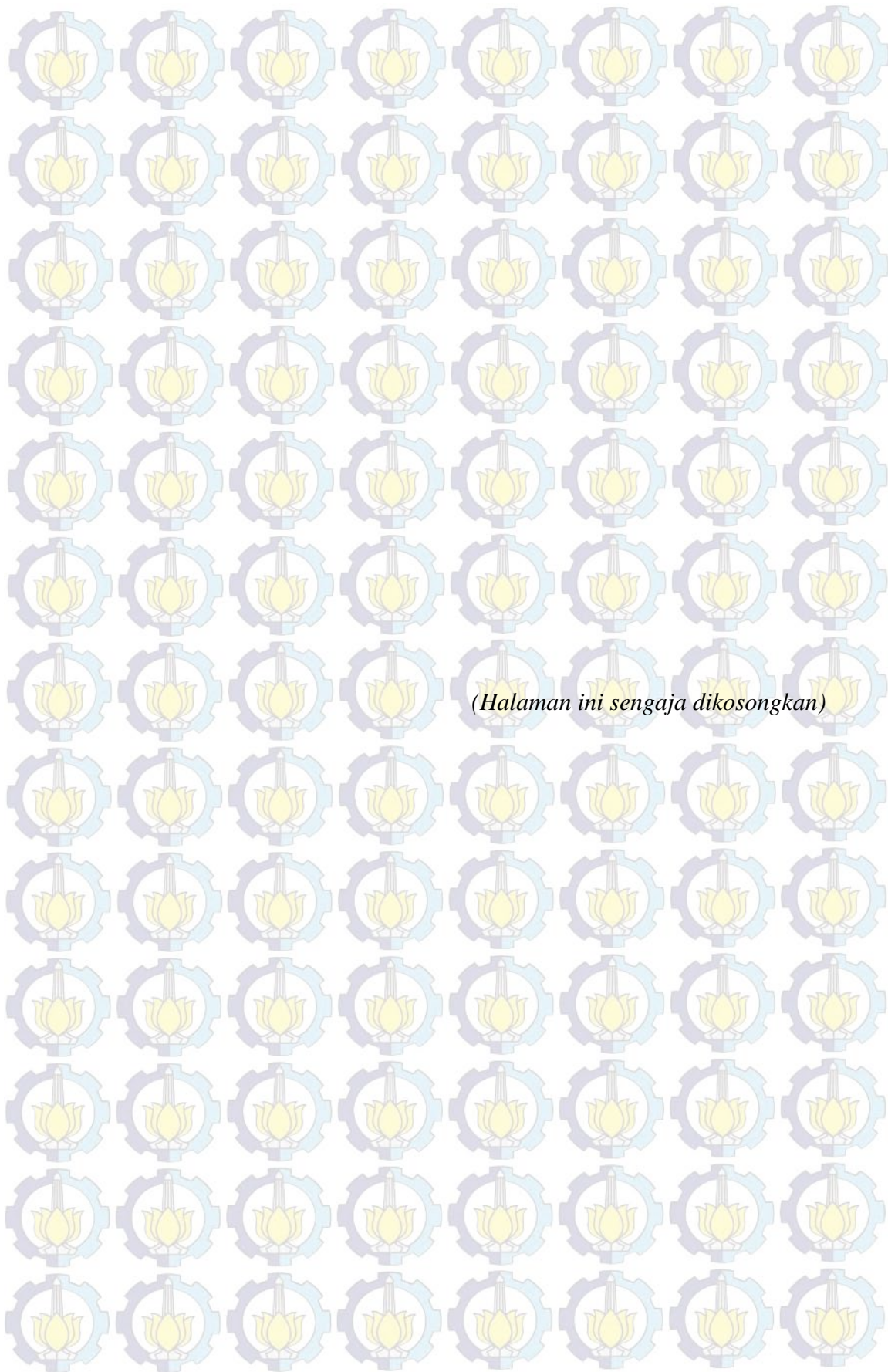
- 
4. Langkah-langkah untuk menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dengan model PIG adalah sebagai berikut :
 1. Membuat analisis deskriptif terhadap variabel respon dan variabel prediktor.
 2. Menguji korelasi antara variabel respon dengan variabel prediktor.
 3. Mendeteksi kasus multikolinearitas dari variabel prediktor dengan menggunakan kriteria uji VIF.
 4. Melakukan uji overdispersi.
 5. Menentukan nilai penaksir parameter model PIG.
 6. Melakukan pengujian hipotesis untuk regresi PIG.
 7. Melakukan interpretasi model PIG yang didapatkan.
 8. Menguji kelayakan model yang terbentuk.
 9. Membuat kesimpulan dari hasil analisis tersebut.



Gambar 3.1. Langkah-langkah Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Regresi PIG



Gambar 3.2. Langkah-langkah Analisis Faktor-faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus Baru HIV dengan Model Regresi PIG



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Penaksiran Parameter Poisson Inverse Gaussian (PIG)

Poisson Inverse Gaussian (PIG) ini merupakan metode regresi yang dapat digunakan untuk menganalisis data *count* yang mengalami overdispersi. Pada penelitian ini akan dilakukan penaksiran parameter dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

Langkah pertama dalam menentukan penaksiran parameter adalah menentukan fungsi *likelihood* dari fungsi kepadatan peluang distribusi PIG. Adapun fungsi kepadatan peluang distribusi PIG seperti dijelaskan pada bab II adalah sebagai berikut :

$$P(Y = y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta}; \tau) = \frac{\mu_i^{y_i} e^{-\frac{1}{\tau}}}{y_i!} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu_i\tau + 1)^{-\frac{(y_i - \frac{1}{2})}{2}} K_{s_i} \left(z_i \right),$$

dimana $K_{s_i}(z_i)$ adalah merupakan fungsi *bessel* modifikasi jenis ketiga, sehingga fungsi *likelihood* distribusi PIG adalah sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\beta}; \tau) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta}; \tau)$$

$$L(\boldsymbol{\beta}; \tau) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\mu_i^{y_i} e^{-\frac{1}{\tau}}}{y_i!} \left(\frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (2\mu_i\tau + 1)^{-\frac{(y_i - \frac{1}{2})}{2}} K_{s_i} \left(z_i \right) \right\}, \quad (4.1)$$

dimana $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$.

Langkah kedua, fungsi *likelihood* tersebut diubah kedalam bentuk logaritma natural (\ln), sehingga persamaannya menjadi sebagai berikut :

$$l(\boldsymbol{\beta}; \tau) = \ln L(\boldsymbol{\beta}; \tau)$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \frac{n}{\tau} - \ln \left(\sum_{i=1}^n y_i! \right) + \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) - \frac{n}{2} \ln \tau$$

$$- \sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i - 1}{4} \right) \ln (2\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \tau + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i} (z_i). \quad (4.2)$$

Langkah ketiga, setelah fungsi ln likelihood nya terbentuk, maka selanjutnya persamaan (4.2) diturunkan terhadap masing-masing parameter yaitu β serta τ dan disamadengkan nol.

Turunan pertama persamaan (4.2) terhadap β adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T - \frac{\tau \mathbf{x}_i^T e^{\mathbf{x}_i^T \beta}}{(2e^{\mathbf{x}_i^T \beta} \tau + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{2y_i - 1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \beta} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T - \frac{\tau \mathbf{x}_i^T \mu_i}{(2e^{\mathbf{x}_i^T \beta} \tau + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{2y_i - 1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \beta}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Dalam menyelesaikan turunan fungsi Bessel pada persamaan (4.3) di atas dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa properti dalam fungsi Bessel. Berdasarkan tabel integral dalam Gradshtey dan Ryzhik, 1980 dalam Shoukri, dkk, 2004 diketahui bahwa :

$$\begin{aligned}K_{s+1}(z) &= K_{s-1}(z) + \frac{2s}{z} K_s(z) \\ z \frac{\partial K_s(z)}{\partial z} &= -z K_{s+1}(z) + s K_s(z),\end{aligned}\quad (4.4)$$

sehingga

$$\frac{\partial K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\partial z} = \frac{-z K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) + \left(y_i - \frac{1}{2}\right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{z}.\quad (4.5)$$

Diketahui $z = \frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu_i \tau + 1}$ sehingga persamaan (4.5) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\partial z} &= \frac{-\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu_i \tau + 1}\right) K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) + \left(y_i - \frac{1}{2}\right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu_i \tau + 1}\right)} \\ &= -K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) + \frac{\tau \left(y_i - \frac{1}{2}\right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Jadi penyelesaian turunan fungsi Bessel pada persamaan (4.3) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\partial \beta} &= \frac{\partial \ln K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\partial z} \frac{\partial(z)}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\partial z} \frac{\partial\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu_i \tau + 1}\right)}{\partial \beta} \\
 &= \left(-K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) + \frac{\tau \left(y_i - \frac{1}{2}\right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \right) \left(\frac{1}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right) \\
 &\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} e^{\mathbf{x}_i^T \beta} \mathbf{x}_i^T \right) \\
 &= \left(\frac{-K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} + \frac{\tau \left(y_i - \frac{1}{2}\right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1} K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \mu_i \mathbf{x}_i^T \right) \\
 &= \left(-(2\mu_i \tau + 1)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\tau \left(y_i - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \right) \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}}. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Bila $M(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}$ dimana $M(y_i) = (y_i + 1) \frac{p(y_i + 1)}{p(y_i)}$.

Dengan memasukkan persamaan (4.7) ke dalam persamaan (4.3) maka turunan pertama terhadap β adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \mathbf{x}_i^T - \left(\frac{\tau \mathbf{x}_i^T \mu_i}{2\mu_i \tau + 1} \frac{2y_i - 1}{2} \right) + \left(-(2\mu_i \tau + 1)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\tau \left(y_i - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \right) \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i \tau + 1)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2(2\mu_i\tau+1)y_i\mathbf{x}_i^T}{2(2\mu_i\tau+1)} - \frac{\tau(2y_i-1)\mu_i\mathbf{x}_i^T}{2(2\mu_i\tau+1)} - \frac{2(2\mu_i\tau+1)M(y_i)\mu_i\mathbf{x}_i^T}{2(2\mu_i\tau+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tau(2y_i-1)\mu_i\mathbf{x}_i^T}{2(2\mu_i\tau+1)} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2(2\mu_i\tau+1)\mathbf{x}_i^T(y_i - M(y_i)\mu_i)}{2(2\mu_i\tau+1)} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ (y_i - M(y_i)\mu_i)\mathbf{x}_i^T \right\}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Turunan pertama terhadap $\boldsymbol{\beta}$ disamadengkan nol sehingga

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (y_i - M(y_i)\mu_i)\mathbf{x}_i^T \right\} = 0. \tag{4.9}$$

Selanjutnya turunan pertama persamaan (4.2) terhadap τ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \tau} &= -\frac{n}{\tau^2} - \frac{n}{2\tau} - \sum_{i=1}^n \frac{(2y_i-1)}{4} \frac{2\mu_i}{(2\mu_i\tau+1)} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \tau} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau} - \frac{\mu_i(2y_i-1)}{2(2\mu_i\tau+1)} + \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \tau} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada persamaan (4.7) maka turunan fungsi Bessel pada persamaan (4.10) dapat diselesaikan dengan

$$\frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \tau} = \frac{\partial \ln K_{y_i - \frac{1}{2}}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau}. \tag{4.11}$$

Dengan menggunakan nilai z yang sama seperti pada persamaan (4.6) maka turunannya terhadap τ adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu_i\tau+1} \right)}{\partial \tau} = a'b + ab'.$$

Misalkan

$$a = \frac{1}{\tau}$$

$$a' = -\frac{1}{\tau^2}$$

$$b = (2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$b' = \mu_i(2\mu_i\tau+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu_i \tau + 1} \right)}{\partial \tau} &= a'b + ab' = -\frac{1}{\tau^2} (2\mu_i \tau + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\tau} \mu_i (2\mu_i \tau + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-(\tau\mu_i + 1)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i \tau + 1}},\end{aligned}\quad (4.12)$$

sehingga penyelesaian persamaan (4.11) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \tau} &= \left(-K_{y_i + \frac{1}{2}}(z_i) + \frac{\tau \left(y_i - \frac{1}{2} \right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z_i)}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \right) \left(\frac{1}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z_i)} \right) \left(\frac{-(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \right) \\ &= \left(-(2\mu_i \tau + 1)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\tau \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \right) \left(\frac{-(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \right) \\ &= \frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{(1 + \tau\mu_i) \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\tau \sqrt{2\mu_i \tau + 1}}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Dengan memasukkan persamaan (4.13) ke dalam persamaan (4.10) maka turunan pertama terhadap τ adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \tau} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau} - \frac{\mu_i \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{(2\mu_i \tau + 1)} + \frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{(1 + \tau\mu_i) \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\tau (2\mu_i \tau + 1)} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} + \frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau} - \frac{\tau\mu_i \left(y_i - \frac{1}{2} \right) - (1 + \tau\mu_i) \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\tau (2\mu_i \tau + 1)} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} + \frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau} - \frac{\left(y_i - \frac{1}{2} \right) (1 + 2\mu_i \tau)}{\tau (2\mu_i \tau + 1)} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \tau} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} + \frac{M(y_i)(1+\tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau} - \frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\right)}{\tau} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} + \frac{M(y_i)(1+\tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{1+2y_i-1}{2\tau} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} + \frac{M(y_i)(1+\tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{y_i}{\tau} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Turunan pertama terhadap τ sama dengan nol sehingga

$$\frac{\partial l}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau^2} + \frac{M(y_i)(1+\tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{y_i}{\tau} \right\} = 0. \tag{4.15}$$

Langkah keempat adalah menentukan turunan kedua fungsi *likelihood* terhadap β dan τ . Turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap β adalah dengan menentukan turunan dari persamaan (4.8) terhadap β .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \beta^T} &= \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left((y_i - M(y_i)\mu_i) \mathbf{x}_i^T \right) \right)}{\partial \beta^T} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial (y_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \beta^T} - \frac{\partial (M(y_i) \mu_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \beta^T} \right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Adapun turunan dari persamaan sisi kanan pada persamaan (4.16) adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial (M(y_i) \mu_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \beta^T} = c' d + c d'. \tag{4.17}$$

Misalkan

$$c = M(y_i)$$

$$d = \mu_i \mathbf{x}_i^T$$

maka

$$\frac{\partial (M(y_i) \mu_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \beta^T} = \frac{\partial (M(y_i))}{\partial \beta^T} \mu_i \mathbf{x}_i^T - M(y_i) \frac{\partial (\mu_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \beta^T}. \tag{4.18}$$

Turunan $M(y_i)$ terhadap β adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial(M(y_i))}{\partial \beta^T} = \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \beta^T} = e'f + ef'.$$

Misalkan

$$e = \frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f = \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)}$$

$$\frac{\partial(M(y_i))}{\partial \beta^T} = \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial \beta^T} \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \left(\frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \beta^T}, \quad (4.19)$$

dimana

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial \beta^T} = -\frac{1}{2} (2\mu_i\tau+1)^{-\frac{3}{2}} 2\tau e^{x_i^T \beta} x_i^T \quad (4.20)$$

$$= -\tau \mu_i x_i^T (2\mu_i\tau+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \beta^T} = \frac{l'm - lm'}{m^2},$$

dan misalkan

$$l = K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)$$

$$m = K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)$$

maka

$$\frac{\partial \left(\frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \beta^T} = \frac{\frac{\partial \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \beta^T} K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) - K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \frac{\partial \left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \beta^T}}{\left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)^2}. \quad (4.21)$$

Dengan menggunakan properti fungsi Bessel pada persamaan (4.4) dan (4.5) maka turunan fungsi Bessel tersebut terhadap β adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \beta^T} = \frac{\partial \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial z} \frac{\partial (z)}{\partial \beta^T}$$

$$\frac{\partial \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial z} = \frac{-z K_{y_i + \frac{3}{2}}(z) + \left(y_i + \frac{1}{2} \right) K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{z}$$

$$K_{y_i + \frac{3}{2}}(z) = K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) + \frac{2 \left(y_i + \frac{1}{2} \right)}{z} K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)$$

$$\frac{\partial \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial z} = \frac{-z \left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) + \frac{2 \left(y_i + \frac{1}{2} \right)}{z} K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right) + \left(y_i + \frac{1}{2} \right) K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{z}$$

$$= K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) - \frac{\left(y_i + \frac{1}{2} \right) K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \beta^T} &= \frac{\partial \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial z} \frac{\partial(z)}{\partial \beta^T} \\ &= \left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) - \frac{\left(y_i + \frac{1}{2} \right) K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{z} \right) \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \beta^T} &= \frac{\partial \left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial z} \frac{\partial(z)}{\partial \beta^T} \\ &= \left(-K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) + \frac{\left(y_i - \frac{1}{2} \right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{z} \right) \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dengan memasukkan persamaan (4.22) dan (4.23) maka penyelesaian persamaan (4.21) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \beta^T} &= \frac{\left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) - \frac{\left(y_i + \frac{1}{2} \right) K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{z} \right) \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) - K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)^2}{\left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)^2} \\ &= \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \left(\frac{\left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)^2 + \left(K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) \right)^2 - \frac{2y_i K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{z}}{\left(K_{y_i - \frac{1}{2}}(z) \right)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} &= \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i\tau+1}} \left(\frac{\left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)^2 + \left(K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) \right)^2}{\left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)^2} - \frac{2y_i K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)}{\frac{1}{\tau} \sqrt{2\mu_i\tau+1} \left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)^2} \right) \\
&= \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i\tau+1}} \left(1 + M(y_i)^2 (2\mu_i\tau+1) - 2\tau y_i M(y_i) \right).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dengan memasukkan persamaan (4.20) dan persamaan (4.24) ke dalam persamaan (4.19) maka Turunan $M(y_i)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \left(\frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \\
&= -\tau \mu_i \mathbf{x}_i^T (2\mu_i\tau+1)^{-\frac{3}{2}} \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{2\mu_i\tau+1}} \\
&\quad \left(1 + M(y_i)^2 (2\mu_i\tau+1) - 2\tau y_i M(y_i) \right) \\
&= \frac{-\tau \mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i\tau+1)} M(y_i) + \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i\tau+1)} \left(1 + (2\mu_i\tau+1) M(y_i)^2 - 2\tau y_i M(y_i) \right) \\
&= \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i\tau+1)} \left(-\tau \mu_i \mathbf{x}_i^T + 1 + (2\mu_i\tau+1) M(y_i)^2 - 2\tau y_i M(y_i) \right) \\
&= \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i\tau+1)} \left((2\mu_i\tau+1) M(y_i)^2 + 1 - (2y_i+1)\tau M(y_i) \right) \\
&= \mu_i \mathbf{x}_i^T M(y_i)^2 + \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i\tau+1)} \left(1 - \tau M(y_i)(2y_i+1) \right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Turunan $\mu_i \mathbf{x}_i^T$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} &= \frac{\partial(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}_i^T)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ &= \mathbf{x}_i^T e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}_i^T = \mathbf{x}_i^T \mu_i \mathbf{x}_i^T.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Setelah persamaan (4.25) dan persamaan (4.26) diperoleh maka turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(y_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} - \frac{\partial(M(y_i) \mu_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(0 - \left(\frac{\partial(M(y_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \mu_i \mathbf{x}_i^T - M(y_i) \frac{\partial(\mu_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(0 - \left(\left(\mu_i \mathbf{x}_i^T M(y_i)^2 + \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i \tau + 1)} (1 - \tau M(y_i)(2y_i + 1)) \right) \mu_i \mathbf{x}_i^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - M(y_i) (\mathbf{x}_i^T \mu_i \mathbf{x}_i^T) \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\mu_i \mathbf{x}_i^T \left(\mu_i \mathbf{x}_i^T M(y_i)^2 + \frac{\mu_i \mathbf{x}_i^T}{(2\mu_i \tau + 1)} (1 - \tau M(y_i)(2y_i + 1)) + \mathbf{x}_i^T M(y_i) \right) \right).\end{aligned}\quad (4.27)$$

Selanjutnya adalah menentukan turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap τ yaitu dengan menentukan turunan dari persamaan (4.8) terhadap τ dan menentukan turunan dari persamaan (4.14) terhadap τ .

Turunan dari persamaan (4.8) terhadap τ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \tau} &= \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n ((y_i - M(y_i) \mu_i) \mathbf{x}_i^T) \right)}{\partial \tau} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(y_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \tau} - \mu_i \mathbf{x}_i^T \frac{\partial(M(y_i))}{\partial \tau} \right).\end{aligned}\quad (4.28)$$

Turunan $M(y_i)$ terhadap τ adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial(M(y_i))}{\partial \tau} = \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i \tau + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \tau} = p'q + pq'.$$

Misalkan

$$p = \frac{1}{(2\mu_i\tau + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$q = \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}$$

$$\frac{\partial(M(y_i))}{\partial\tau} = \frac{\partial\left(\frac{1}{(2\mu_i\tau + 1)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial\tau} \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2\mu_i\tau + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial\left(\frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}\right)}{\partial\tau}, \quad (4.29)$$

dimana

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{(2\mu_i\tau + 1)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial\tau} = -\frac{1}{2}(2\mu_i\tau + 1)^{-\frac{3}{2}} 2\mu_i \quad (4.30)$$

$$= -\mu_i (2\mu_i\tau + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}\right)}{\partial\tau} = \frac{r's - rs'}{s^2}.$$

Misalkan

$$r = K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)$$

$$s = K_{y_i - \frac{1}{2}}(z),$$

maka

$$\frac{\partial \left(\frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial \left(K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \tau} K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) - K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) \frac{\partial \left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \tau}}{\left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)^2}. \quad (4.31)$$

Dengan menggunakan properti fungsi Bessel pada persamaan (4.4) dan (4.5) maka turunan fungsi Bessel tersebut terhadap τ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \left(K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial z} \frac{\partial (z)}{\partial \tau} \\ &= \left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) - \frac{\left(y_i + \frac{1}{2} \right) K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{z} \right) \frac{-(\tau \mu_i + 1)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i \tau + 1}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)}{\partial z} \frac{\partial (z)}{\partial \tau} \\ &= \left(-K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) + \frac{\left(y_i - \frac{1}{2} \right) K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)}{z} \right) \frac{-(\tau \mu_i + 1)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i \tau + 1}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dengan memasukkan persamaan (4.32) dan (4.33) maka penyelesaian persamaan (4.31) :

$$\frac{\partial \left(\frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \tau} = \frac{\left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) - \frac{\left(y_i + \frac{1}{2} \right) K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{z} \right) \frac{-(\tau \mu_i + 1)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i \tau + 1}} K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)}{\left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) \left(-K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) + \frac{\left(y_i - \frac{1}{2} \right) K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)}{z} \right)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i\tau+1}} \\
&= \frac{-(\tau\mu_i+1)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i\tau+1}} \left(\frac{\left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)^2 + \left(K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) \right)^2 - \frac{2y_i K_{y_i+\frac{1}{2}}(z) K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)}{z}}{\left(K_{y_i-\frac{1}{2}}(z) \right)^2} \right) \\
&= \frac{-(\tau\mu_i+1)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i\tau+1}} \left(1 + M(y_i)^2 (2\mu_i\tau+1) - 2\tau y_i M(y_i) \right). \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.30) dan (4.34) maka persamaan (4.29) diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(M(y_i))}{\partial\tau} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial\tau} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial\tau} \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \left(\frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial\tau} \\
&= -\mu_i (2\mu_i\tau+1)^{-\frac{3}{2}} \frac{K_{y_i+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i-\frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2\mu_i\tau+1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{-(\tau\mu_i+1)}{\tau^2 \sqrt{2\mu_i\tau+1}} \left(1 + M(y_i)^2 (2\mu_i\tau+1) - 2\tau y_i M(y_i) \right) \right) \\
&= \frac{1}{(2\mu_i\tau+1)} \left(-\mu_i M(y_i) - \frac{(\tau\mu_i+1)}{\tau^2} + 1 + M(y_i)^2 (2\mu_i\tau+1) - 2\tau y_i M(y_i) \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(M(y_i))}{\partial \tau} = M(y_i)^2 + \frac{1}{(2\mu_i\tau + 1)} \left(1 - \frac{(\tau\mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2\tau y_i) \right). \quad (4.35)$$

Oleh karena itu persamaan (4.28) diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \tau} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(y_i \mathbf{x}_i^T)}{\partial \tau} - \mu_i \mathbf{x}_i^T \frac{\partial(M(y_i))}{\partial \tau} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(0 - \mu_i \mathbf{x}_i^T \left(M(y_i)^2 + \frac{1}{(2\mu_i\tau + 1)} \left(1 - \frac{(\tau\mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2\tau y_i) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Turunan kedua selanjutnya adalah turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap τ yang diperoleh dengan menentukan turunan dari persamaan (4.15) terhadap τ , sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\tau^2} + \frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} - \frac{y_i}{\tau} \right) \right)}{\partial \tau} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \left(-\frac{1}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} + \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} - \frac{\partial \left(\frac{y_i}{\tau} \right)}{\partial \tau} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{\tau^3} + \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} - \frac{y_i}{\tau^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(2 - y_i\tau)}{\tau^3} + \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Adapun turunan dari persamaan sisi kanan pada persamaan (4.37) di atas adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Misalkan

$$u = M(y_i)(1 + \tau\mu_i)$$

$$v = \tau^2,$$

maka

$$\frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial (M(y_i)(1 + \tau\mu_i))}{\partial \tau} \tau^2 - M(y_i)(1 + \tau\mu_i) \frac{\partial (\tau^2)}{\partial \tau}}{(\tau^2)^2}. \quad (4.38)$$

Turunan dari persamaan u adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial (M(y_i)(1 + \tau\mu_i))}{\partial \tau} &= \frac{\partial M(y_i)}{\partial \tau} (1 + \tau\mu_i) + M(y_i) \frac{\partial (1 + \tau\mu_i)}{\partial \tau} \\ &= \left(M(y_i)^2 + \left(1 - \frac{(\tau\mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2\tau y_i) \right) \right) \\ &\quad \frac{(1 + \tau\mu_i)}{(2\mu_i\tau + 1)} + M(y_i)\mu_i \\ &= \frac{(1 + \tau\mu_i)}{(2\mu_i\tau + 1)} \left(1 - \frac{(\tau\mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2\tau y_i) \right) \\ &\quad + (1 + \tau\mu_i) M(y_i)^2 + M(y_i)\mu_i, \end{aligned} \quad (4.39)$$

maka turunan dari persamaan (4.38) adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} &= \frac{\left\{ \frac{(1 + \tau\mu_i)}{(2\mu_i\tau + 1)} \left(1 - \frac{(\tau\mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2\tau y_i) \right) \right\} \tau^2}{(\tau^2)^2} \\ &\quad - \frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i) 2\tau}{(\tau^2)^2} \\ \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau\mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} &= \frac{1}{\tau^3} \left\{ \tau \left[\frac{(1 + \tau\mu_i)}{(2\mu_i\tau + 1)} \left(1 - \frac{(\tau\mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2\tau y_i) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (1 + \tau\mu_i) M(y_i)^2 + M(y_i)\mu_i \right. \\ &\quad \left. - 2M(y_i)(1 + \tau\mu_i) \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Dengan memasukkan hasil turunan pada persamaan (4.40) ke dalam persamaan (4.37) maka turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap τ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l}{\partial \tau^2} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(2 - y_i \tau)}{\tau^3} + \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \tau \mu_i)}{\tau^2} \right)}{\partial \tau} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(2 - y_i \tau)}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^3} \left\{ \tau \left[\frac{(1 + \tau \mu_i)}{(2 \mu_i \tau + 1)} \left(1 - \frac{(\tau \mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2 \tau y_i) \right) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1 + \tau \mu_i) M(y_i)^2 + M(y_i) \mu_i \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2M(y_i)(1 + \tau \mu_i) \right\} \right) \\
 &= \frac{1}{\tau^3} \left\{ \tau \left(\frac{(1 + \tau \mu_i)}{(2 \mu_i \tau + 1)} \left(1 - \frac{(\tau \mu_i + 1)}{\tau^2} - M(y_i)(\mu_i + 2 \tau y_i) \right) + (1 + \tau \mu_i) M(y_i)^2 + M(y_i) \mu_i \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2M(y_i)(1 + \tau \mu_i) + (2 - y_i \tau) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Dari hasil pada turunan di atas diperoleh persamaan yang eksplisit maka untuk menyelesaikan persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan *RS algorithm* dan *CG algorithm* dimana fungsi *likelihood* dimaksimumkan dengan menggunakan *Fisher Scoring Algorithm* dengan persamaan sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r)} + \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}), \tag{4.42}$$

dimana

$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}^T, \hat{\tau})^T \\
 \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \left(\frac{\partial l}{\partial \hat{\tau}}, \frac{\partial l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}^T} \right)^T \\
 \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) &= -E[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})] \\
 \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})_{(k+1)(k+1)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau} \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}^T} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}} \partial \hat{\tau}} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}} \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}^T} \end{bmatrix}_{\theta=\theta_{(m)}}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\text{Sehingga } \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau} \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}} \partial \hat{\tau}} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}} \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}^T} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Matriks hessian merupakan matriks yang berisi turunan kedua dari fungsi *likelihood* terhadap parameter β dan τ . Adapun langkah-langkah *Fisher Scoring Algorithm* sebagai berikut :

1. Menentukan vektor awal parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ dengan mengasumsikan data memenuhi model regresi linier berganda :

$$\mathbf{Y}^* = \beta_{0_0} + x_{i1}\beta_{1_0} + \dots + x_{ip}\beta_{p_0} + \varepsilon_i \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n$$

dan dengan metode kuadrat terkecil diperoleh $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}^*$

2. Membentuk vektor gradien $\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)$ dengan mensubstitusikan persamaan (4.8) dan (4.14) ke dalam persamaan (4.43)
3. Membentuk matriks hessian $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$ dengan mensubstitusikan persamaan (4.27), (4.36) dan (4.41) ke dalam persamaan (4.44)
4. Membentuk matriks informasi *Fisher* $\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)$
5. Memasukkan nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ sehingga diperoleh vektor gradien $\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$ dan matriks hessian $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$.
6. Mulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan (4.44), nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke- m .
7. Jika belum diperoleh penaksiran parameter yang konvergen saat iterasi ke- m , maka dilanjutkan kembali ke langkah 6 hingga iterasi ke- $m+1$. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\| \leq \varepsilon$ dan $\varepsilon > 0$ adalah bilangan yang sangat kecil.

Fisher Scoring Algorithm kemudian digunakan dalam dua algoritma yang digunakan dalam *Package* Gamlss yaitu algoritma Rigby Stasinopoulos (*RS*

algorithm) dan algoritma Cole Green (*CG algorithm*). *RS algorithm* digunakan pada 10 iterasi pertama yang bertujuan untuk menstabilkan proses *fitting* dan kemudian merubah menjadi *CG algorithm* yang melanjutkan sampai 50 iterasi. *CG algorithm* membuat konvergen lebih cepat mendekati maksimum.

4.2. Pengujian Hipotesis Parameter Poisson Inverse Gaussian (PIG)

Dalam menentukan nilai statistik uji, maka ditentukan terlebih dahulu dua buah fungsi *likelihood* yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi-fungsi *likelihood* yang dimaksud adalah $L(\hat{\Omega})$ yaitu nilai *maximum likelihood* untuk model yang lebih lengkap dengan melibatkan variabel prediktor dan $L(\hat{\omega})$, yaitu nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) yang dinotasikan dengan :

$$G = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) \\ = 2 \left(\ln(L(\hat{\Omega})) - \ln(L(\hat{\omega})) \right).$$

4.2.1. Pengujian serentak parameter PIG

Pengujian serentak parameter pada model PIG ini dilakukan untuk mengetahui signifikansi parameter β secara bersama-sama dengan hipotesis sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_l \neq 0 \text{ dengan } l=1,2,\dots,k$$

Berikut adalah fungsi *likelihood* di bawah populasi $(L(\Omega))$:

$$L(\hat{\Omega}) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{(e^{x_i^T \hat{\beta}})^{y_i} e^{\frac{1}{\hat{\tau}}}}{y_i!} \left(\frac{2}{\pi \hat{\tau}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(2(e^{x_i^T \hat{\beta}}) \hat{\tau} + 1 \right)^{-\frac{(y_i - \frac{1}{2})}{2}} K_{s_i}(z_i) \right\}$$

$$\ln(L(\hat{\Omega})) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{n}{\hat{\tau}} - \ln\left(\sum_{i=1}^n y_i!\right) + \frac{n}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - \frac{n}{2} \ln \hat{\tau} \\ - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i-1}{4}\right) \ln(2\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\tau} + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i).$$

Dengan nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\hat{\tau}$ merupakan nilai taksiran parameter yang diperoleh dari persamaan (4.42). Sedangkan fungsi \ln *likelihood* untuk model yang tidak melibatkan variabel prediktor dibentuk pada himpunan parameter dibawah H_0 sehingga diperoleh $L(\omega)$.

$$L(\hat{\omega}) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{(e^{\hat{\beta}_0})^{y_i} e^{\frac{1}{\hat{\tau}_\omega}}}{y_i!} \left(\frac{2}{\pi \hat{\tau}_\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(2(e^{\hat{\beta}_0}) \hat{\tau}_\omega + 1\right)^{-\frac{(y_i - \frac{1}{2})}{2}} K_{s_i}(z_i) \right\}$$

$$\ln(L(\hat{\omega})) = \sum_{i=1}^n y_i \hat{\beta}_0 + \frac{n}{\hat{\tau}_\omega} - \ln\left(\sum_{i=1}^n y_i!\right) + \frac{n}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - \frac{n}{2} \ln \hat{\tau}_\omega \\ - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i-1}{4}\right) \ln(2\hat{\beta}_0 \hat{\tau}_\omega + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i).$$

Dengan nilai $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\tau}_\omega$ merupakan taksiran parameter yang diperoleh dengan cara yang sama seperti taksiran parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\hat{\tau}$, yaitu menurunkan fungsi $\ln(L(\omega))$ terhadap parameter di bawah H_0 yaitu β_0 dan τ_ω sebagai berikut :

Turunan pertama fungsi l terhadap β_0

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2(2e^{\beta_0} \tau_\omega + 1)(y_i - M(y_i)e^{\beta_0})}{2(2e^{\beta_0} \tau_\omega + 1)} \right\} \\ = \sum_{i=1}^n (y_i - M(y_i)e^{\beta_0}).$$

Turunan pertama fungsi l terhadap τ_ω

$$\frac{\partial l}{\partial \hat{\tau}_\omega} = \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\tau_\omega^2} + \frac{M(y_i)(1 + \tau_\omega e^{\beta_0})}{\tau_\omega^2} - \frac{y_i}{\tau_\omega} \right\}.$$

Dengan menggunakan langkah-langkah *Fisher Scoring Algorithm* seperti sebelumnya, dimana :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T, \hat{\tau}_\omega)^T$$

$$\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\frac{\partial l}{\partial \hat{\tau}_\omega}, \frac{\partial l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T} \right)^T$$

$$\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) = -E \left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) \right]$$

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})_{(k+1)(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}_\omega} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}_\omega \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 \partial \hat{\tau}_\omega} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T} \end{bmatrix}_{\theta=\theta_{(m)}}$$

$$\text{sehingga } \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}_\omega} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}_\omega \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 \partial \hat{\tau}_\omega} & \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh nilai taksiran $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ dan $\hat{\tau}_\omega$ maka dapat dilakukan perhitungan untuk mendapatkan statistik uji dengan persamaan sebagai berikut :

$$G = 2 \left(\ln(L(\hat{\Omega})) - \ln(L(\hat{\omega})) \right)$$

$$= 2 \left(\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{n}{\hat{\tau}} - \ln \left(\sum_{i=1}^n y_i! \right) + \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) - \frac{n}{2} \ln \hat{\tau} \right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i - 1}{4} \right) \ln(2 \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\tau} + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i) \right) \end{aligned} \right)$$

$$= 2 \left(\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n y_i \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 + \frac{n}{\hat{\tau}_\omega} - \ln \left(\sum_{i=1}^n y_i! \right) + \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) - \frac{n}{2} \ln \hat{\tau}_\omega \right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i - 1}{4} \right) \ln(2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T \hat{\tau}_\omega + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i) \right) \end{aligned} \right)$$

Statistik G adalah pendekatan dari distribusi chi square χ^2 dengan derajat bebas v sehingga kriteria pengujiannya adalah tolak H_0 apabila $G_{hitung} > \chi^2_{(\alpha, v)}$ dimana

v adalah derajat bebas yang diperoleh dari jumlah parameter di bawah populasi dikurangi jumlah parameter di bawah H_0 .

4.2.2. Pengujian parsial parameter PIG

Selain pengujian serentak, pengujian secara parsial model PIG juga perlu dilakukan untuk mengetahui signifikansi pada masing-masing parameter β dan τ dengan hipotesis sebagai berikut :

Parameter β

$$H_0 : \beta_l = 0$$

$$H_1 : \beta_l \neq 0 \text{ dengan } l = 1, 2, \dots, k$$

Statistik uji yang digunakan dalam uji hipotesis ini adalah statistik uji Z dengan persamaan seperti berikut ini

$$Z = \frac{\hat{\beta}_l}{SE(\hat{\beta}_l)}$$

Nilai $SE(\hat{\beta}_l) = \sqrt{\hat{V}ar(\hat{\beta}_l)}$ dimana nilai $\hat{V}ar(\hat{\beta}_l)$ diperoleh dari elemen diagonal utama ke- $(m+2)$ dari matriks varians dan covarians yang diperoleh dari persamaan

$$Cov(\hat{\theta}) = -(\mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}))$$

Kriteria penolakan pada pengujian ini adalah tolak H_0 bila $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$ dengan nilai α adalah taraf signifikansi.

Parameter τ

$$H_0 : \tau = 0$$

$$H_1 : \tau \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan dalam uji hipotesis ini adalah statistik uji Z dengan persamaan seperti berikut ini

$$Z = \frac{\hat{\tau}}{SE(\hat{\tau})}$$

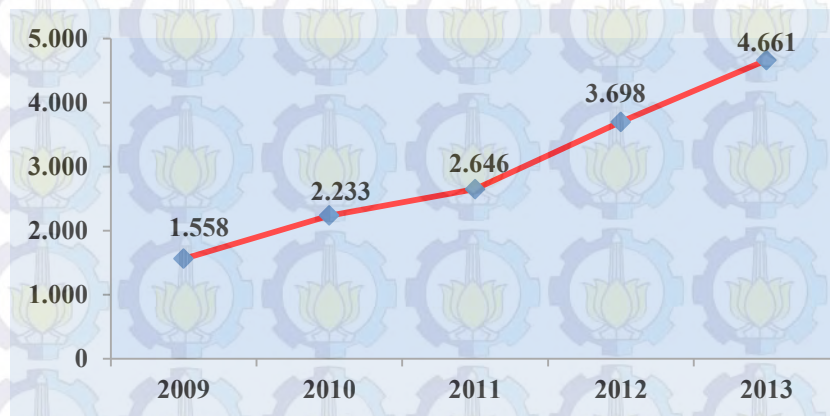
Kriteria penolakan pada pengujian ini adalah tolak H_0 bila $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$ dengan nilai α adalah taraf signifikansi.

4.3. Aplikasi Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)

Regresi Poisson Inverse Gaussian merupakan regresi yang dapat diaplikasikan pada data *count* yang mengalami overdispersi. Pada penelitian ini, pemodelan regresi PIG diaplikasikan pada data jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur pada tahun 2013 karena data tersebut mengalami overdispersi.

4.3.1. Analisis Deskriptif Variabel Penelitian

Sampai dengan bulan Desember tahun 2013, jumlah kasus HIV yang dilaporkan adalah sebanyak 4.661 kasus yang ditemukan melalui Volunteer Conseling and Test (VCT). Angka tersebut sesungguhnya jauh lebih kecil dibandingkan angka yang sebenarnya terjadi (fenomena gunung es). Propinsi Jawa Timur merupakan propinsi kedua setelah DKI Jakarta dengan jumlah kasus HIV terbanyak ditemukan.



Gambar 4.1. Perkembangan Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2009-2013

Berdasarkan Gambar 4.1 di atas, dapat digambarkan perkembangan kasus HIV dari tahun 2009 sampai tahun 2013 mengalami peningkatan tiap tahunnya. Semakin banyaknya kasus HIV yang ditemukan ini tidak lepas dari peran klinik

VCT sebagai upaya untuk memperlambat laju penyebaran penyakit AIDS. Seperti terlihat pada gambar 4.2 terdapat beberapa kabupaten/kota dengan jumlah kasus HIV terbanyak yang ditemukan diantaranya adalah Kota Surabaya, Kota Malang, Kabupaten Jember, Kabupaten Banyuwangi dan Kabupaten Sidoarjo. Kota Surabaya merupakan kota dengan jumlah kasus HIV ditemukan terbanyak yaitu mencapai 1.278 kasus.



Gambar 4.2. Peta Persebaran Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013

Pada penelitian ini, dilakukan penerapan regresi Poisson Inverse Gaussian pada jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur pada tahun 2013. Adapun variabel bebas yang dilibatkan dalam penelitian ini seperti terlihat pada Lampiran 3 meliputi persentase penduduk miskin di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur (X_1), persentase penduduk dengan pendidikan tertinggi SLTA ke atas di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur (X_2), persentase pasangan usia subur yang sedang menggunakan alat KB kondom di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur (X_3), rasio jumlah tenaga kesehatan per 100.000 penduduk di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur (X_4), rasio jumlah fasilitas kesehatan per 100.000 penduduk di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur (X_5), persentase daerah perkotaan di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur (X_6) dan persentase penduduk usia 25-34 tahun di tiap kabupaten/kota di Propinsi Jawa Timur (X_7).

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa pada tahun 2013 di Propinsi Jawa Timur, rata-rata jumlah kasus HIV 122,66 dengan jumlah tertinggi 1.278 dan terendah 0 (tidak ditemukan kasus HIV di kabupaten/kota tersebut). Rata-rata

persentase penduduk miskin sebesar 12,72 persen dengan Kabupaten Sampang memiliki persentase tertinggi dan Kota Batu memiliki persentase terendah. Sementara itu, rata-rata persentase penduduk dengan pendidikan SLTA ke atas adalah sebesar 25,74 persen dengan persentase tertinggi pada Kota Madiun dan Kabupaten Sampang memiliki persentase terendah.

Tabel 4.1. Analisis Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor

Variabel	<i>Mean</i>	<i>Stdev</i>	<i>Variance</i>	Minimum	Maximum
Y	122,66	231,64	53.658,02	0	1.278
X ₁	12,72	5,20	27,07	4,75	26,97
X ₂	25,74	12,71	161,57	7,22	56,01
X ₃	1,84	1,38	1,91	0,34	7,06
X ₄	29,54	34,32	1.178,50	4,66	150,26
X ₅	3,95	3,04	9,27	0,52	15,37
X ₆	43,24	31,54	994,58	8,99	100,00
X ₇	15,91	1,28	1,63	13,69	19,71

Rata-rata persentase pasangan usia subur (PUS) yang sedang menggunakan alat KB kondom sebesar 1,84 persen dengan Kota Madiun memiliki persentase tertinggi dan Kabupaten Blitar memiliki persentase terendah. Rata-rata rasio jumlah tenaga kesehatan per 100.000 penduduk sebesar 29,54 dengan Kota Madiun memiliki rasio tertinggi dan Kabupaten Tulungagung memiliki rasio terendah. Rata-rata rasio jumlah fasilitas kesehatan per 100.000 penduduk sebesar 3,95 persen dengan Kota Mojokerto memiliki rasio tertinggi dan Kota Pasuruan memiliki rasio terendah. Rata-rata persentase daerah perkotaan sebesar 43,24 persen dengan kota-kota kecuali Kota Blitar, Kota Probolinggo dan Kota Batu dimana semua daerahnya berstatus perkotaan sedangkan Kabupaten Sampang memiliki persentase daerah perkotaan terendah. Rata-rata persentase penduduk usia 25-34 tahun sebesar 15,91 persen dengan Kota Surabaya memiliki persentase tertinggi dan Kabupaten Pacitan memiliki persentase terendah.

4.3.2. Pemeriksaan Korelasi dan Multikolinearitas

Sebelum melakukan pemodelan dengan regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG), terlebih dahulu dilakukan pengecekan hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor. Selain itu, perlu juga dilakukan pengecekan hubungan antara variabel prediktor yang bertujuan untuk mengecek apakah terjadi multokolinearitas atau tidak.

Pengujian hipotesisnya adalah sebagai berikut :

H_0 : Tidak ada hubungan antar kedua variabel

H_1 : Terdapat hubungan antar kedua variabel

Koefisien korelasi antar variabel respon dengan variabel prediktor serta antara variabel prediktor disajikan dalam Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Koefisien Korelasi Variabel Respon dan Variabel Prediktor

Korelasi	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
X ₁	-0,377 0,019						
X ₂	0,365 0,024	-0,752 0,000					
X ₃	0,049 0,769	-0,426 0,008	0,691 0,000				
X ₄	0,440 0,006	-0,640 0,000	0,870 0,000	0,761 0,000			
X ₅	-0,044 0,795	-0,167 0,315	0,351 0,031	0,598 0,000	0,373 0,021		
X ₆	0,416 0,009	-0,727 0,000	0,878 0,000	0,566 0,000	0,784 0,000	0,335 0,040	
X ₇	0,433 0,007	-0,281 0,088	0,445 0,005	0,220 0,184	0,476 0,003	0,140 0,401	0,611 0,000

Dari Tabel 4.2 terlihat bahwa dengan $\alpha = 0,1$ beberapa variabel prediktor yang memiliki hubungan dengan variabel respon antara lain persentase penduduk

miskin, persentase penduduk dengan pendidikan SLTA ke atas, rasio jumlah tenaga kesehatan, persentase daerah perkotaan dan persentase penduduk usia 25-34 tahun. Sementara itu, variabel persentase PUS yang menggunakan kondom dan rasio fasilitas kesehatan tidak memiliki hubungan dengan variabel respon. Akan tetapi, variabel tersebut tetap dimasukkan dalam analisis karena secara teori variabel tersebut berpengaruh terhadap variabel respon. Bila dilihat dari koefisien korelasi antar variabel prediktor dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi multikolinearitas karena nilai koefisien korelasinya tidak lebih dari 0,95. Untuk lebih memastikan ada atau tidaknya multikolinearitas, dapat dilihat dari nilai *Variance Inflation Factors* (VIF) dari tiap variabel prediktor. Berikut adalah nilai *Variance Inflation Factors* (VIF) dari masing-masing variabel prediktor yang digunakan dalam penelitian ini :

Tabel 4.3. Nilai VIF Variabel Prediktor

Variabel	Nilai VIF
X ₁	2,711
X ₂	8,453
X ₃	3,665
X ₄	5,810
X ₅	1,655
X ₆	6,682
X ₇	1,971

Dari Tabel 4.3 dapat dilihat bahwa tidak terjadi multikolinearitas karena tiap-tiap variabel prediktor yang digunakan dalam penelitian ini memiliki nilai VIF yang kurang dari 10.

4.3.3. Kemencengan dan Uji Overdispersi

Dataset yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari 38 observasi dengan 44,7 persen diantaranya memiliki kejadian kasus HIV nol, sehingga data ini memiliki kecenderungan menceng ke kanan dengan nilai kemencengan (*skewness*) 3,675. Seperti disebutkan dalam Zha, Lord dan Zou, 2014, bahwa

suatu distribusi dianggap sangat menceng (*highly skewed*) bila nilai absolut dari *skewness* lebih dari satu. Maka dari itu, data yang digunakan dalam penelitian ini dapat dikatakan *highly skewed* dan dimodelkan dengan menggunakan regresi PIG.

Regresi PIG cocok untuk diaplikasikan pada data yang mengalami overdispersi dimana variansnya lebih besar dari *means*. Oleh karena itu, data yang digunakan dalam penelitian ini diuji apakah mengalami overdispersi atau tidak dengan hipotesis sebagai berikut :

$$H_0 : \text{var}(Y) = \mu_i$$

$$H_1 : \text{var}(Y) = \mu_i + \alpha.g(\mu_i).$$

Dengan menggunakan *package* AER pada *software* R, diperoleh nilai $\alpha = 424,9482$ dan *p-value* sebesar 0,06748 lebih kecil dari tingkat signifikansi 10 persen sehingga tolak H_0 yang dapat disimpulkan bahwa varians tidak sama dengan rata-rata yang berarti data tersebut mengalami overdispersi dan pemodelan dengan regresi PIG dapat dilakukan.

4.3.4. Pemodelan Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)

Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG) merupakan regresi yang diaplikasikan pada data yang mengalami overdispersi dan *highly skewed*. Pemodelan dalam penelitian ini menggunakan *package* gamlss yang tersedia pada *software* R. Pemilihan model regresi PIG terbaik dalam penelitian ini dilakukan dengan metode *backward elimination* yang bertujuan untuk mendapatkan model PIG dengan variabel-variabel prediktor yang signifikan.

Metode *backward elimination* dilakukan berdasarkan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC). Metode ini mengeliminasi beberapa variabel prediktor sehingga dapat menghasilkan nilai AIC yang lebih kecil. Dengan mengeluarkan variabel X_1 , X_4 dan X_7 dari model akan menghasilkan model regresi dengan nilai AIC terkecil. Model yang terakhir adalah model yang terbaik karena mengeluarkan variabel lainnya tidak akan memberikan nilai AIC yang lebih kecil lagi seperti terlihat pada Lampiran 6.

Akan tetapi, pada model yang terakhir terbentuk masih terdapat variabel prediktor yang tidak signifikan yaitu variabel persentase daerah perkotaan (X_6),

dimana berarti variabel tersebut tidak berkontribusi dalam model. Variabel tersebut tidak signifikan, yang berarti gagal tolak H_0 pada uji parsialnya dimana dapat diartikan bahwa $\beta_6 = 0$. Seperti terlihat pada Lampiran 6, mengeluarkan variabel X_6 juga mengakibatkan nilai estimasi parameter dari variabel yang signifikan pada model sebelumnya berubah, yang dapat diartikan bahwa variabel X_6 sudah dapat dijelaskan oleh variabel lain yang signifikan dalam model. Oleh karena itu, dilakukan pemodelan regresi PIG dengan variabel-variabel prediktor yang signifikan. Dengan nilai AIC yang tidak terlalu jauh berbeda dengan model sebelumnya, dibentuk pemodelan regresi PIG dengan variabel-variabel prediktor yaitu persentase penduduk dengan pendidikan SLTA ke atas (X_2), persentase PUS yang sedang menggunakan alat KB kondom (X_3) dan rasio fasilitas kesehatan (X_5).

Tabel 4.4. Penaksiran Parameter Model Regresi PIG pada Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur tahun 2013

Parameter	Taksiran	Standard Error	Z Hitung	<i>P-value</i>
β_0	0,5055	2,5668	0,197	0,84508
β_2	0,2570	0,0498	5,161	0,000015*
β_3	-1,9701	0,6796	-2,899	0,00661*
β_5	0,4031	0,2070	1,947	0,06007*
τ	5,430	2,477	2,192	0,0355*

*)Signifikan dengan taraf signifikansi $\alpha = 0,1$

Nilai pada tabel di atas menunjukkan nilai *p-value* pada uji parameter dispersi τ yang lebih kecil dari nilai α sehingga tolak H_0 yang berarti nilai parameter dispersi tidak sama dengan nol dan dapat disimpulkan bahwa terjadi fenomena overdispersi pada jumlah kasus baru HIV di Propinsi Jawa Timur pada tahun 2013.

Hasil dari penaksiran parameter diperoleh model regresi PIG sebagai berikut

$$\hat{\mu} = \exp(0,5055 + 0,2570X_2 - 1,9701X_3 + 0,4031X_5)$$

Berdasarkan model di atas, maka dapat diinterpretasikan sebagai berikut ini. Setiap penambahan 1 persen variabel X_2 maka akan melipatgandakan rata-rata variabel respon Y sebesar $\exp(0,2570) = 1,293045$ kali dari rata-rata variabel respon semula bila variabel lain tetap. Dengan kata lain, penambahan 1 persen dari persentase penduduk dengan pendidikan SLTA ke atas maka akan sebanding dengan kenaikan rata-rata jumlah kasus baru HIV sebesar 1,293045 kali dari rata-ratanya semula bila variabel lainnya tetap.

Setiap penambahan 1 persen variabel X_3 maka akan melipatgandakan rata-rata variabel respon Y sebesar $\exp(-1,9701) = 0,139443$ kali dari rata-rata variabel respon semula bila variabel lain tetap. Dengan kata lain, penambahan 1 persen dari persentase PUS yang menggunakan kondom maka akan sebanding dengan penurunan rata-rata jumlah kasus baru HIV sebesar 0,139443 kali dari rata-ratanya semula bila variabel lainnya tetap.

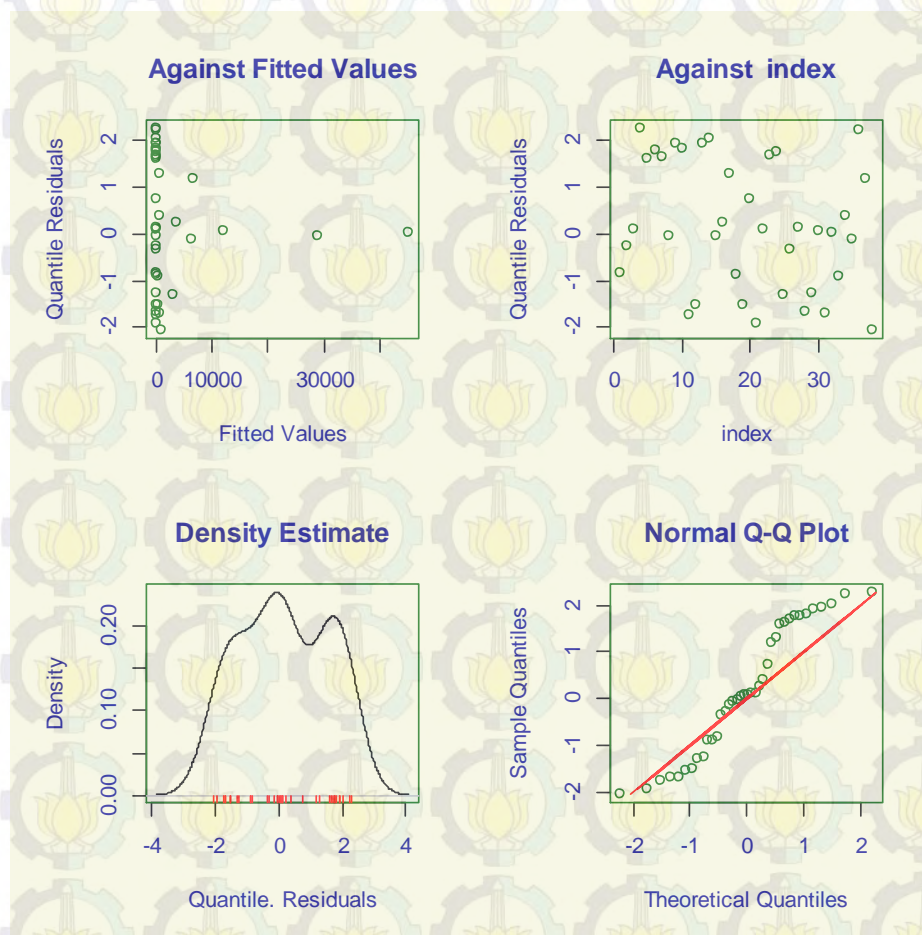
Setiap penambahan 1 rasio variabel X_6 maka akan melipatgandakan rata-rata variabel respon Y sebesar $\exp(0,4031) = 1,496457$ kali dari rata-rata variabel respon semula bila variabel lain tetap. Dengan kata lain, penambahan 1 rasio fasilitas kesehatan maka akan sebanding dengan peningkatan rata-rata jumlah kasus baru HIV sebesar 1,496457 kali dari rata-ratanya semula bila variabel lainnya tetap.

Masalah keterbatasan data yang tersedia menyebabkan beberapa interpretasi dari model yang terbentuk tidak sesuai dengan teori yang berlaku tentang HIV, sehingga interpretasi tersebut tidak dapat dilihat sebagai hubungan sebab akibat. Data jumlah kasus baru HIV yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data yang berasal dari hasil laporan klinik-klinik VCT di Propinsi

Jawa Timur dimana pasien-pasiennya datang secara sukarela untuk memeriksakan diri ke klinik tersebut.

4.3.5. Uji Kelayakan Model Regresi PIG

Dalam penelitian ini, kelayakan pemodelan regresi PIG dapat dilihat dari plot *randomised normalised quantile residuals* (r_i). Nilai r yang sebenarnya berdistribusi normal standar sehingga diharapkan nilai \hat{r}_i juga berdistribusi normal standar (walaupun variabel responnya tidak berdistribusi normal) di bawah asumsi model yang terbentuk sesuai.



Gambar 4.3. Plot Residual dari Model Regresi PIG pada Data Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013

Gambar 4.3 di atas menunjukkan empat gambar berbeda dari plot residuals model regresi PIG yang terbentuk. Gambar pada pojok kanan bawah menunjukkan bahwa estimasi *randomised normalised quantile residuals* berdistribusi normal sehingga dapat disimpulkan bahwa model regresi PIG yang terbentuk telah sesuai. Selain dari plotnya, uji kenormalan terhadap *randomised normalised quantile residuals* juga dapat dilihat dari nilai koefisien korelasinya. Nilai *Filliben Correlation Coefficient* dari plot tersebut adalah sebesar 0,9687167 yang berarti signifikan pada $\alpha = 0,10$ (nilai kritis = 0,975) sehingga *randomised normalised quantile residuals* berdistribusi normal.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Kesimpulan berdasarkan hasil penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, penaksiran parameter model regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG) dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Estimasi parameter tersebut menghasilkan persamaan yang tidak *close form* sehingga diselesaikan dengan menggunakan *RS algorithm* dan *CG algorithm* dimana fungsi likelihood dimaksimumkan dengan menggunakan *Fisher Scoring Algorithm*. Pengujian hipotesis parameternya dilakukan secara serentak dan parsial. Pengujian hipotesisnya menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) yaitu perbandingan antara fungsi *likelihood* model penuh yang melibatkan seluruh variabel prediktor dengan fungsi *likelihood* untuk model di bawah hipotesis H_0 yang tidak melibatkan variabel prediktor.
2. Model regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG) yang terbentuk adalah model regresi dengan variabel-variabel prediktor yang signifikan yaitu persentase penduduk dengan pendidikan SLTA ke atas (X_2), persentase PUS yang menggunakan kondom (X_3) dan rasio fasilitas kesehatan (X_5).

5.2. Saran

1. Berdasarkan hasil penelitian ini, saran yang bisa diberikan kepada Pemerintah Daerah (Pemda) Propinsi Jawa Timur adalah meningkatkan sosialisasi tentang virus HIV serta penyebarannya pada berbagai lapisan masyarakat terutama pada mereka yang rentan tertular virus tersebut.
2. Pengumpulan data tentang jumlah kasus HIV seharusnya tidak hanya berasal dari klinik-klinik VCT yang ada, tetapi juga dari pengumpulan dan pemeriksaan di masyarakat agar data yang ada menggambarkan keadaan yang sebenarnya. Masalah keterbatasan data yang tersedia menyebabkan

kurang maksimalnya beberapa penelitian tentang kasus HIV terutama yang berkaitan dengan karakteristik penderitanya.

3. Sementara itu, saran pada metode penelitian ini, dapat dilakukan pengembangan pemodelan regresi PIG dengan memasukkan efek spasial yaitu model regresi *Geographically Poisson Inverse Gaussian* (GPIG) serta pemodelan regresi data *count* yang overdispersi dengan melibatkan variabel respon lebih dari satu seperti *Bivariate* PIG (BPIG) dan *Multivariate* PIG (MPIG).

Lampiran 1. Turunan Pertama fungsi *likelihood* PIG di bawah H_0

$$l = \ln(L(\hat{\omega})) = \sum_{i=1}^n y_i \hat{\beta}_0 + \frac{n}{\hat{\tau}_\omega} - \ln \left(\sum_{i=1}^n y_i! \right) + \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) - \frac{n}{2} \ln \hat{\tau}_\omega - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2y_i - 1}{4} \right) \ln(2\hat{\beta}_0 \hat{\tau}_\omega + 1) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \hat{\beta}_0} &= \sum_{i=1}^n y_i - \frac{\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{2y_i - 1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i - \frac{\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{2y_i - 1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \hat{\beta}_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dimana penyelesaian turunan fungsi Bessel pada persamaan (1.2) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\partial \hat{\beta}_0} &= \frac{\partial \ln K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{1}{\hat{\tau}_\omega} \sqrt{2\mu_i \hat{\tau}_\omega + 1} \right)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ &= \left(-K_{y_i + \frac{1}{2}}(z) + \frac{\hat{\tau}_\omega \left(y_i - \frac{1}{2} \right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \right) \left(\frac{1}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} e^{\hat{\beta}_0} \right) \\ &= \left(\frac{-K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} + \frac{\hat{\tau}_\omega \left(y_i - \frac{1}{2} \right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1} K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} e^{\hat{\beta}_0} \right) \\ &= \left(-\left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\hat{\tau}_\omega \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \right) \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

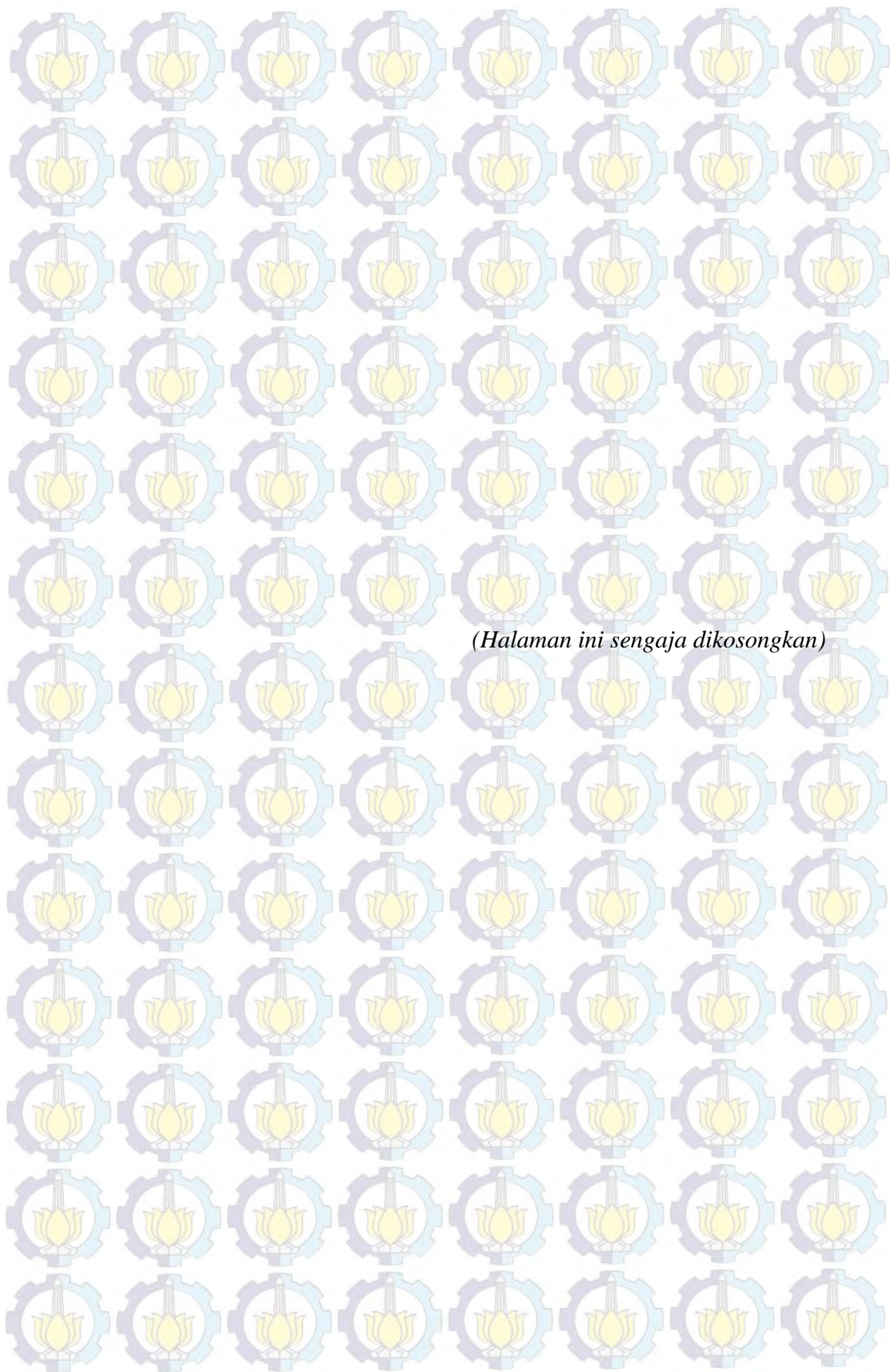
$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \hat{\beta}_0} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i - \left(\frac{\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}}{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1} \frac{2y_i - 1}{2} \right)}{e^{\hat{\beta}_0}} + \left(\frac{1}{-(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^2} M(y_i) + \frac{\hat{\tau}_\omega \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)y_i}{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} - \frac{\hat{\tau}_\omega (2y_i - 1)e^{\hat{\beta}_0}}{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} - \frac{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)M(y_i)e^{\hat{\beta}_0}}{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\hat{\tau}_\omega (2y_i - 1)e^{\hat{\beta}_0}}{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)(y_i - M(y_i)e^{\hat{\beta}_0})}{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ y_i - M(y_i)e^{\hat{\beta}_0} \right\} \\
\frac{\partial l}{\partial \hat{\tau}_\omega} &= -\frac{n}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{n}{2\hat{\tau}_\omega} - \sum_{i=1}^n \frac{(2y_i - 1)}{4} \frac{2e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \hat{\tau}_\omega} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{1}{2\hat{\tau}_\omega} - \frac{e^{\hat{\beta}_0}(2y_i - 1)}{2(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} + \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \hat{\tau}_\omega} \right\} \quad (1.4)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada bab IV maka turunan fungsi Bessel pada persamaan (1.4) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \hat{\tau}_\omega} &= \left(-K_{y_i + \frac{1}{2}}(z_i) + \frac{\hat{\tau}_\omega \left(y_i - \frac{1}{2} \right) K_{y_i - \frac{1}{2}}(z_i)}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \right) \left(\frac{1}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z_i)} \right) \left(\frac{-(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{\hat{\tau}_\omega^2 \sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \right) \\
&= \left(-(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\hat{\tau}_\omega \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \right) \left(\frac{-(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{\hat{\tau}_\omega^2 \sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \right) \\
&= \frac{M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\hat{\tau}_\omega \sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Dengan memasukkan persamaan (1.5) ke dalam persamaan (1.4) maka turunan pertama terhadap $\hat{\tau}_\omega$ adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l}{\partial \hat{\tau}_\omega} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{1}{2\hat{\tau}_\omega} - \frac{e^{\hat{\beta}_0} \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)} + \frac{M(y_i) \left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right)}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{\left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right) \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\hat{\tau}_\omega \left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} + \frac{M(y_i) \left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right)}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{1}{2\hat{\tau}_\omega} - \frac{\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \left(y_i - \frac{1}{2} \right) - \left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right) \left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\hat{\tau}_\omega \left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} + \frac{M(y_i) \left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right)}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{1}{2\hat{\tau}_\omega} - \frac{\left(y_i - \frac{1}{2} \right) \left(1 + 2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega \right)}{\hat{\tau}_\omega \left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} + \frac{M(y_i) \left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right)}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{1}{2\hat{\tau}_\omega} - \frac{\left(y_i - \frac{1}{2} \right)}{\hat{\tau}_\omega} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} + \frac{M(y_i) \left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right)}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{1 + 2y_i - 1}{2\hat{\tau}_\omega} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} + \frac{M(y_i) \left(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} \right)}{\hat{\tau}_\omega^2} - \frac{y_i}{\hat{\tau}_\omega} \right\}
 \end{aligned}$$



Lampiran 2. Turunan Kedua fungsi *likelihood* PIG di bawah H_0

Turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap adalah $\hat{\beta}_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\beta}_0} &= - \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_i - M(y_i) e^{\hat{\beta}_0}) \right)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial (y_i)}{\partial \hat{\beta}_0} - \frac{\partial (M(y_i) e^{\hat{\beta}_0})}{\partial \hat{\beta}_0} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Adapun turunan dari persamaan sisi kanan pada persamaan (2.1) adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial (M(y_i) e^{\hat{\beta}_0})}{\partial \hat{\beta}_0} = \frac{\partial (M(y_i))}{\partial \hat{\beta}_0} e^{\hat{\beta}_0} - M(y_i) \frac{\partial (e^{\hat{\beta}_0})}{\partial \hat{\beta}_0}$$

Sama seperti dibahas pada bab IV maka turunan $M(y_i)$ terhadap $\hat{\beta}_0$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(y_i)}{\partial \hat{\beta}_0} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial \hat{\beta}_0} \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \left(\frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ &= -\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} (2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{-\frac{3}{2}} \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{\sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \\ &\quad \left(1 + M(y_i)^2 (2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1) - 2\hat{\tau}_\omega y_i M(y_i) \right) \\ &= \frac{-\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} M(y_i) + \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \left(1 + (2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1) M(y_i)^2 - 2\hat{\tau}_\omega y_i M(y_i) \right) \\ &= e^{\hat{\beta}_0} M(y_i)^2 + \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} (1 - \hat{\tau}_\omega M(y_i)(2y_i + 1)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Setelah persamaan (2.2) diperoleh maka turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap $\hat{\beta}_0$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\beta}_0} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(y_i)}{\partial \hat{\beta}_0} - \frac{\partial(M(y_i)e^{\hat{\beta}_0})}{\partial \hat{\beta}_0} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(0 - \left(\frac{\partial(M(y_i))}{\partial \hat{\beta}_0} e^{\hat{\beta}_0} - M(y_i) \frac{\partial(e^{\hat{\beta}_0})}{\partial \hat{\beta}_0} \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(0 - \left(\left(e^{\hat{\beta}_0} M(y_i)^2 + \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} (1 - \hat{\tau}_\omega M(y_i)(2y_i + 1)) \right) e^{\hat{\beta}_0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - M(y_i)(e^{\hat{\beta}_0}) \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(-e^{\hat{\beta}_0} \left(e^{\hat{\beta}_0} M(y_i)^2 + \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} (1 - \hat{\tau}_\omega M(y_i)(2y_i + 1)) + M(y_i) \right) \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya adalah menentukan turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap $\hat{\tau}_\omega$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\tau}_\omega} &= \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_i - M(y_i)e^{\hat{\beta}_0}) \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(y_i)}{\partial \hat{\tau}_\omega} - e^{\hat{\beta}_0} \frac{\partial(M(y_i))}{\partial \hat{\tau}_\omega} \right)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sama seperti Bab IV maka turunan $M(y_i)$ terhadap $\hat{\tau}_\omega$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(M(y_i))}{\partial \hat{\tau}_\omega} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} \\
 &= \frac{\partial \left(\frac{1}{(2\mu_i \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2\mu_i \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \left(\frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega}}{\partial \hat{\tau}_\omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(M(y_i))}{\partial \hat{\tau}_\omega} &= -e^{\hat{\beta}_0} (2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{-\frac{3}{2}} \frac{K_{y_i + \frac{1}{2}}(z)}{K_{y_i - \frac{1}{2}}(z)} + \frac{1}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)^{\frac{1}{2}}} \\
&\left(\frac{-(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2 \sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \left(1 + M(y_i)^2 (2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1) - 2\hat{\tau}_\omega y_i M(y_i) \right) \right) \\
&= \frac{-e^{\hat{\beta}_0} M(y_i)}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \frac{-(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2 \sqrt{2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1}} \left(1 + M(y_i)^2 (2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1) - 2\hat{\tau}_\omega y_i M(y_i) \right) \\
&= \frac{1}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \left(-e^{\hat{\beta}_0} M(y_i) - \frac{(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2} + 1 + M(y_i)^2 (2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1) - 2\hat{\tau}_\omega y_i M(y_i) \right)
\end{aligned}$$

Oleh karena itu persamaan (2.3) diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\tau}_\omega} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(y_i)}{\partial \hat{\tau}_\omega} - e^{\hat{\beta}_0} \frac{\partial(M(y_i))}{\partial \hat{\tau}_\omega} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(-e^{\hat{\beta}_0} \left(M(y_i)^2 + \frac{1}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \left(1 - \frac{(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2} - M(y_i)(e^{\hat{\beta}_0} + 2\hat{\tau}_\omega y_i) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Turunan kedua selanjutnya adalah turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap τ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}_\omega^2} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \left(-\frac{1}{\hat{\tau}_\omega^2} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} + \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{\hat{\tau}_\omega^2} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} \frac{\partial \left(\frac{y_i}{\hat{\tau}_\omega} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{\hat{\tau}_\omega^3} + \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{\hat{\tau}_\omega^2} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} - \frac{y_i}{\hat{\tau}_\omega^2} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(2 - y_i \hat{\tau}_\omega)}{\hat{\tau}_\omega^3} + \frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{\hat{\tau}_\omega^2} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} \right) \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Adapun turunan dari persamaan sisi kanan pada persamaan (2.4) di atas adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\frac{M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{\hat{\tau}_\omega^2} \right)}{\partial \hat{\tau}_\omega} &= \frac{\left\{ \frac{(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0})}{(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1)} \left(1 - \frac{(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2} - M(y_i)(e^{\hat{\beta}_0} + 2\hat{\tau}_\omega y_i) \right) \right.}{\left. + (1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) M(y_i)^2 + M(y_i)e^{\hat{\beta}_0} \right\} \hat{\tau}_\omega^2}{(\hat{\tau}_\omega^2)^2} \\
&= \frac{M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) 2\hat{\tau}_\omega}{(\hat{\tau}_\omega^2)^2} \\
&= \frac{1}{\hat{\tau}_\omega^3} \left\{ \frac{\hat{\tau}_\omega}{\left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)} \left(1 - \frac{(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2} - M(y_i)(e^{\hat{\beta}_0} + 2\hat{\tau}_\omega y_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) M(y_i)^2 + M(y_i)e^{\hat{\beta}_0} \right. \\
&\quad \left. - 2M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) \right\} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Dengan memasukkan hasil turunan pada persamaan (2.5) ke dalam persamaan (2.4) maka turunan kedua fungsi *likelihood* l terhadap $\hat{\tau}_\omega$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l}{\partial \hat{\tau}_\omega^2} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(2 - y_i \hat{\tau}_\omega)}{\hat{\tau}_\omega^3} + \frac{1}{\hat{\tau}_\omega^3} \left\{ \frac{\hat{\tau}_\omega}{\left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)} \left(1 - \frac{(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2} - M(y_i)(e^{\hat{\beta}_0} + 2\hat{\tau}_\omega y_i) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) M(y_i)^2 + M(y_i)e^{\hat{\beta}_0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) \right\} \right\} \\
&= \frac{1}{\hat{\tau}_\omega^3} \left\{ \frac{\hat{\tau}_\omega}{\left(2e^{\hat{\beta}_0} \hat{\tau}_\omega + 1 \right)} \left(1 - \frac{(\hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0} + 1)}{\hat{\tau}_\omega^2} - M(y_i)(e^{\hat{\beta}_0} + 2\hat{\tau}_\omega y_i) \right) + (1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) M(y_i)^2 + M(y_i)e^{\hat{\beta}_0} \right. \\
&\quad \left. - 2M(y_i)(1 + \hat{\tau}_\omega e^{\hat{\beta}_0}) + (2 - y_i \hat{\tau}_\omega) \right\}
\end{aligned}$$

Lampiran 3. Data Jumlah Kasus Baru HIV serta Faktor-Faktor yang Diduga Mempengaruhi di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013

No	Kabupaten /Kota	Y	X1	X2	X3	X4
1	Kab. Pacitan	0	16,66	15,55	1,19	16,34
2	Kab. Ponorogo	0	11,87	23,32	2,83	13,63
3	Kab. Trenggalek	0	13,5	15,92	1,64	13,80
4	Kab. Tulungagung	180	9,03	24,39	2,62	4,66
5	Kab. Blitar	124	10,53	17,27	0,34	11,76
6	Kab. Kediri	206	13,17	22,42	0,97	17,43
7	Kab. Malang	152	11,44	18,12	0,43	17,12
8	Kab. Lumajang	0	12,09	14,65	1,68	10,12
9	Kab. Jember	458	11,63	16,57	0,74	12,71
10	Kab. Banyuwangi	357	9,57	20,80	1,09	11,11
11	Kab. Bondowoso	0	15,23	13,04	2,16	9,73
12	Kab. Situbondo	0	13,59	16,15	1,11	12,41
13	Kab. Probolinggo	198	21,12	14,32	0,68	7,12
14	Kab. Pasuruan	111	11,22	18,17	1,30	14,00
15	Kab. Sidoarjo	253	6,69	49,16	1,83	91,83
16	Kab. Mojokerto	57	10,94	27,80	0,80	21,39
17	Kab. Jombang	180	11,12	24,87	1,29	15,52
18	Kab. Nganjuk	0	13,55	21,57	1,20	16,03
19	Kab. Madiun	0	12,4	23,98	0,90	17,51
20	Kab. Magetan	9	12,14	24,92	1,61	19,95
21	Kab. Ngawi	0	15,38	18,47	0,55	10,86
22	Kab. Bojonegoro	0	15,95	16,01	1,09	13,74
23	Kab. Tuban	25	17,16	17,13	1,42	10,02
24	Kab. Lamongan	229	16,12	24,69	1,68	12,41
25	Kab. Gresik	4	13,89	35,10	1,27	13,89
26	Kab. Bangkalan	0	23,14	11,79	1,07	9,07
27	Kab. Sampang	0	26,97	7,22	1,41	5,67
28	Kab. Pamekasan	0	18,45	18,90	1,20	12,42
29	Kab. Sumenep	0	21,13	12,78	2,34	6,80
30	Kota Kediri	132	8,2	45,81	4,50	87,69
31	Kota Blitar	0	7,39	45,61	4,44	71,45
32	Kota Malang	467	4,85	46,49	1,54	40,90
33	Kota Probolinggo	0	17,35	34,27	2,41	25,34
34	Kota Pasuruan	16	7,57	37,14	1,85	39,63
35	Kota Mojokerto	50	6,63	46,89	5,06	75,23
36	Kota Madiun	175	5	56,01	7,06	150,26
37	Kota Surabaya	1278	5,97	47,33	2,62	120,39
38	Kota Batu	0	4,75	33,41	1,90	62,45

Lampiran 3. Lanjutan

No	Kabupaten /Kota	X5	X6	X7
1	Kab. Pacitan	4,59	12,87	13,69
2	Kab. Ponorogo	4,31	23,78	13,75
3	Kab. Trenggalek	3,23	23,57	14,84
4	Kab. Tulungagung	2,78	38,01	15,37
5	Kab. Blitar	1,94	33,06	14,63
6	Kab. Kediri	1,18	39,53	15,76
7	Kab. Malang	2,00	37,44	15,84
8	Kab. Lumajang	3,44	18,54	16,28
9	Kab. Jember	4,21	32,66	15,26
10	Kab. Banyuwangi	3,75	45,62	15,72
11	Kab. Bondowoso	3,86	24,66	15,53
12	Kab. Situbondo	3,78	30,88	17,04
13	Kab. Probolinggo	3,38	28,48	16,45
14	Kab. Pasuruan	1,48	32,88	17,05
15	Kab. Sidoarjo	1,84	83,85	17,62
16	Kab. Mojokerto	5,28	38,82	15,83
17	Kab. Jombang	5,39	53,27	15,46
18	Kab. Nganjuk	3,30	12,87	15,29
19	Kab. Madiun	2,69	23,30	13,74
20	Kab. Magetan	3,54	37,45	14,64
21	Kab. Ngawi	1,46	11,52	14,07
22	Kab. Bojonegoro	1,88	14,88	15,89
23	Kab. Tuban	2,46	16,77	16,2
24	Kab. Lamongan	3,58	13,08	13,89
25	Kab. Gresik	2,44	44,10	16,85
26	Kab. Bangkalan	2,67	14,59	15,16
27	Kab. Sampang	7,41	8,99	15,96
28	Kab. Pamekasan	2,17	16,93	16,87
29	Kab. Sumenep	4,06	11,45	16,52
30	Kota Kediri	14,86	100,00	16,85
31	Kota Blitar	7,37	45,65	15,57
32	Kota Malang	3,21	100,00	16,44
33	Kota Probolinggo	2,67	86,21	16,79
34	Kota Pasuruan	0,52	100,00	17,52
35	Kota Mojokerto	15,37	100,00	17,64
36	Kota Madiun	4,62	100,00	15,64
37	Kota Surabaya	3,27	100,00	19,71
38	Kota Batu	4,06	87,50	17,24

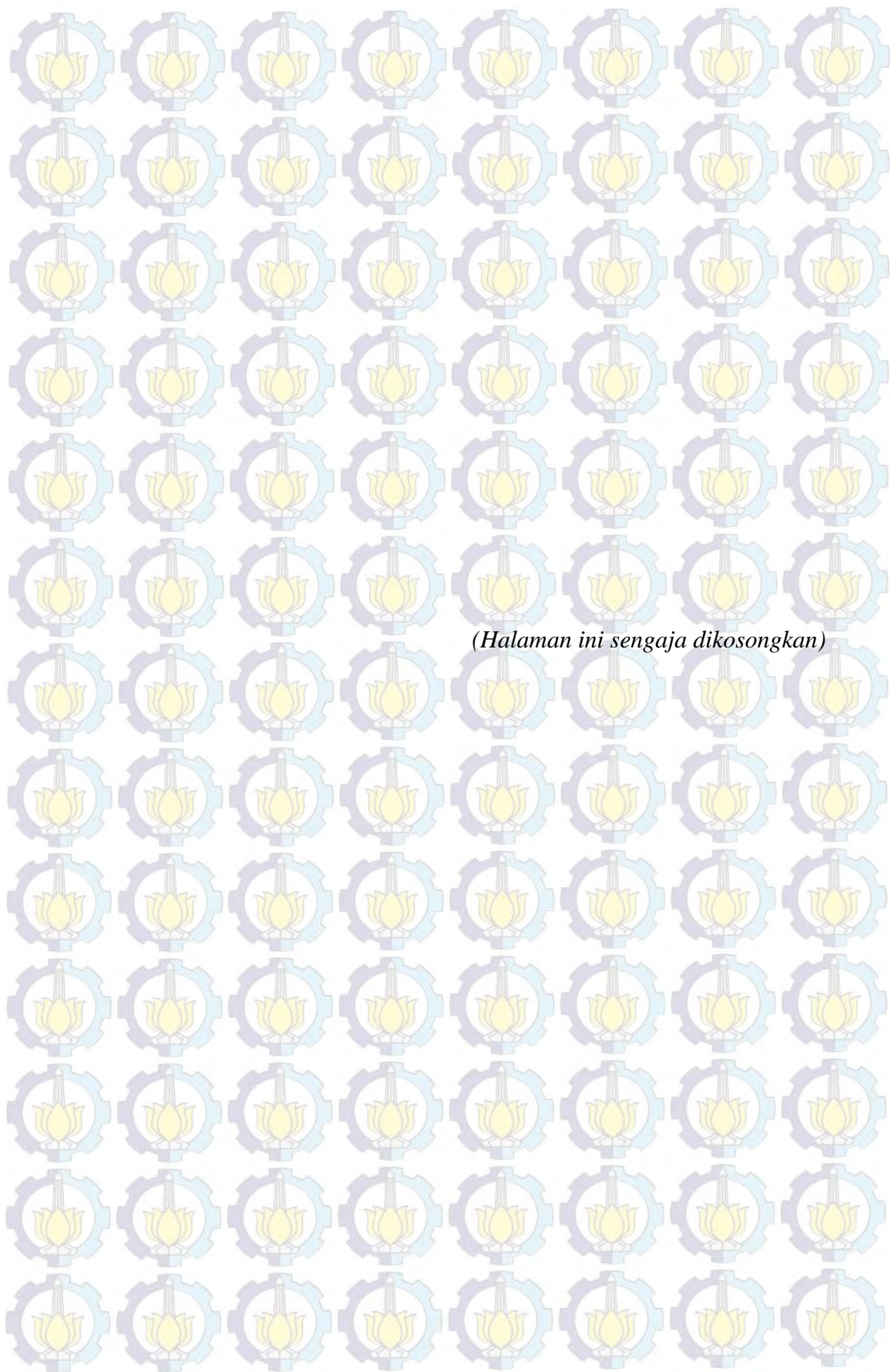
Lampiran 4. Program R pada Uji Overdispersi

```
library(AER)
data <- read.csv("D://S2 ITS SURABAYA/SEMESTER 3/TESIS/OLAH
DATA/data tesis widi.csv", sep=";", header=TRUE)
Y=data[,1]
X1=data[,2]
X2=data[,3]
X3=data[,4]
X4=data[,5]
X5=data[,6]
X6=data[,7]
X7=data[,8]
rd <- glm(Y ~ 1, data = data, family = poisson)
dispersiontest(rd, trafo=1)
```

Hasil Program R pada Uji Overdispersi

```
Overdispersion test

data:  rd
z = 1.4948, p-value = 0.06748
alternative hypothesis: true alpha is greater than 0
sample estimates:
alpha
424.9482
```

Lampiran 5. Program R pada Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)

```
library(gamlss)
```

```
data <- read.csv("D://S2 ITS SURABAYA/SEMESTER 3/TESIS/OLAH  
DATA/data tesis widi.csv", sep=";", header=TRUE)
```

```
Y=data[,1]
```

```
X1=data[,2]
```

```
X2=data[,3]
```

```
X3=data[,4]
```

```
X4=data[,5]
```

```
X5=data[,6]
```

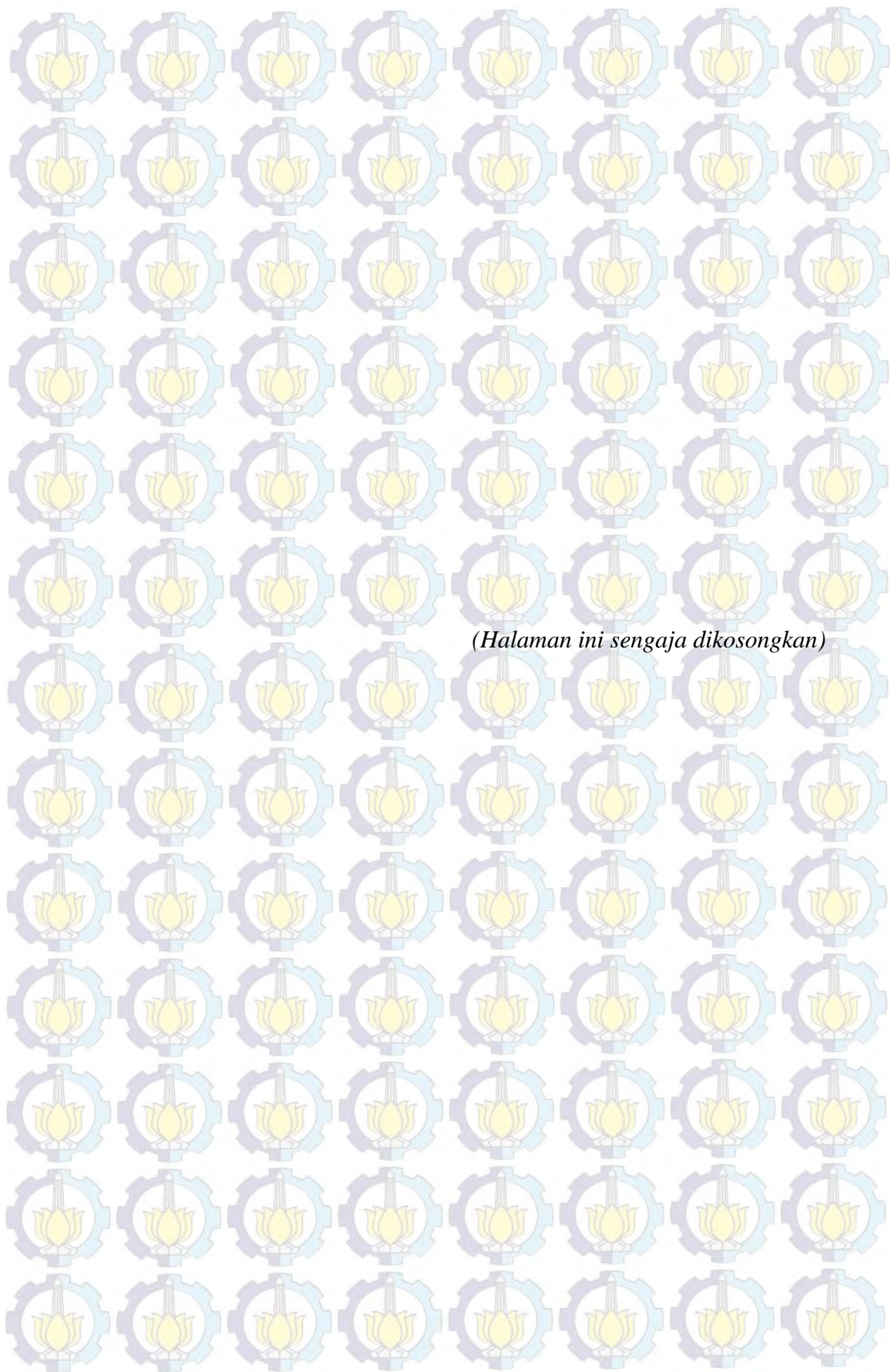
```
X6=data[,7]
```

```
X7=data[,8]
```

```
step(gamlss(Y ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7, family=PIG, data  
= data, method=mixed(10,50), direction = "backward"))
```

```
summary(m1<-gamlss(Y ~ X2 + X3 + X5 + X6, family=PIG, data = data,  
method=mixed(10,50)))
```

```
summary(m1<-gamlss(Y ~ X2 + X3 + X5, family=PIG, data = data,  
method=mixed(10,50)))
```

Lampiran 6. Hasil Program R pada Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG)

```
GAMLSS-RS iteration 1: Global Deviance = 364.6572
GAMLSS-RS iteration 2: Global Deviance = 357.7755
GAMLSS-RS iteration 3: Global Deviance = 356.7883
GAMLSS-RS iteration 4: Global Deviance = 356.4092
GAMLSS-RS iteration 5: Global Deviance = 356.2001
GAMLSS-RS iteration 6: Global Deviance = 356.0775
GAMLSS-RS iteration 7: Global Deviance = 356.0007
GAMLSS-RS iteration 8: Global Deviance = 355.944
GAMLSS-RS iteration 9: Global Deviance = 355.9022
GAMLSS-RS iteration 10: Global Deviance = 355.8681
GAMLSS-CG iteration 1: Global Deviance = 355.7005
GAMLSS-CG iteration 2: Global Deviance = 355.6932
GAMLSS-CG iteration 3: Global Deviance = 355.6893
GAMLSS-CG iteration 4: Global Deviance = 355.6877
GAMLSS-CG iteration 5: Global Deviance = 355.6867
Start: AIC=373.69
Y ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7
```

```
trying - X1
trying - X2
trying - X3
trying - X4
trying - X5
trying - X6
trying - X7
```

	Df	AIC	LRT	Pr(Chi)
- X7	1	371.68	-0.0040	1.00000
- X4	1	371.71	0.0209	0.88512
- X1	1	372.26	0.5711	0.44982
- X6	1	372.35	0.6595	0.41675
<none>		373.69		
- X5	1	374.20	2.5159	0.11270
- X2	1	376.35	4.6661	0.03076 *
- X3	1	377.08	5.3948	0.02020 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
GAMLSS-RS iteration 1: Global Deviance = 364.5978
GAMLSS-RS iteration 2: Global Deviance = 357.7606
GAMLSS-RS iteration 3: Global Deviance = 356.7823
GAMLSS-RS iteration 4: Global Deviance = 356.4622
GAMLSS-RS iteration 5: Global Deviance = 356.2156
GAMLSS-RS iteration 6: Global Deviance = 356.0962
GAMLSS-RS iteration 7: Global Deviance = 356.0065
GAMLSS-RS iteration 8: Global Deviance = 355.9485
GAMLSS-RS iteration 9: Global Deviance = 355.9274
GAMLSS-RS iteration 10: Global Deviance = 355.9101
GAMLSS-CG iteration 1: Global Deviance = 355.7364
GAMLSS-CG iteration 2: Global Deviance = 355.818
GAMLSS-CG iteration 3: Global Deviance = 355.7002
GAMLSS-CG iteration 4: Global Deviance = 355.697
GAMLSS-CG iteration 5: Global Deviance = 355.6872
GAMLSS-CG iteration 6: Global Deviance = 355.6854
GAMLSS-CG iteration 7: Global Deviance = 355.6842
GAMLSS-CG iteration 8: Global Deviance = 355.6831
GAMLSS-CG iteration 9: Global Deviance = 355.6828
```

```
Step: AIC=371.68
Y ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6
```

```
trying - X1
trying - X2
trying - X3
trying - X4
trying - X5
trying - X6
```

	Df	AIC	LRT	Pr(Chi)
- X4	1	369.69	0.0076	0.93069


```

- X1 1 370.28 0.5938 0.44094
- X6 1 370.75 1.0677 0.30146
<none> 371.68
- X5 1 372.20 2.5196 0.11244
- X2 1 374.46 4.7781 0.02882 *
- X3 1 375.17 5.4881 0.01915 *

```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

GAMLSS-RS iteration 1: Global Deviance = 364.4297
GAMLSS-RS iteration 2: Global Deviance = 357.7585
GAMLSS-RS iteration 3: Global Deviance = 356.8141
GAMLSS-RS iteration 4: Global Deviance = 356.4248
GAMLSS-RS iteration 5: Global Deviance = 356.2065
GAMLSS-RS iteration 6: Global Deviance = 356.082
GAMLSS-RS iteration 7: Global Deviance = 356.0139
GAMLSS-RS iteration 8: Global Deviance = 355.9523
GAMLSS-RS iteration 9: Global Deviance = 355.9082
GAMLSS-RS iteration 10: Global Deviance = 355.8747
GAMLSS-CG iteration 1: Global Deviance = 355.7029
GAMLSS-CG iteration 2: Global Deviance = 355.698
GAMLSS-CG iteration 3: Global Deviance = 355.6947
GAMLSS-CG iteration 4: Global Deviance = 355.6928
GAMLSS-CG iteration 5: Global Deviance = 355.691
GAMLSS-CG iteration 6: Global Deviance = 355.6903

```

Step: AIC=369.69

Y ~ X1 + X2 + X3 + X5 + X6

```

trying - X1
trying - X2
trying - X3
trying - X5
trying - X6

```

	Df	AIC	LRT	Pr(Chi)
- X1	1	368.52	0.8313	0.36189
- X6	1	368.77	1.0813	0.29840
<none>		369.69		
- X5	1	370.21	2.5199	0.11242
- X2	1	372.50	4.8126	0.02825 *
- X3	1	374.06	6.3661	0.01163 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

GAMLSS-RS iteration 1: Global Deviance = 365.9298
GAMLSS-RS iteration 2: Global Deviance = 358.8009
GAMLSS-RS iteration 3: Global Deviance = 357.7574
GAMLSS-RS iteration 4: Global Deviance = 357.3322
GAMLSS-RS iteration 5: Global Deviance = 357.1072
GAMLSS-RS iteration 6: Global Deviance = 356.9755
GAMLSS-RS iteration 7: Global Deviance = 356.8927
GAMLSS-RS iteration 8: Global Deviance = 356.8271
GAMLSS-RS iteration 9: Global Deviance = 356.7794
GAMLSS-RS iteration 10: Global Deviance = 356.7434
GAMLSS-CG iteration 1: Global Deviance = 356.5447
GAMLSS-CG iteration 2: Global Deviance = 356.5405
GAMLSS-CG iteration 3: Global Deviance = 356.5375
GAMLSS-CG iteration 4: Global Deviance = 356.5296
GAMLSS-CG iteration 5: Global Deviance = 356.5274
GAMLSS-CG iteration 6: Global Deviance = 356.5248
GAMLSS-CG iteration 7: Global Deviance = 356.5236
GAMLSS-CG iteration 8: Global Deviance = 356.5224
GAMLSS-CG iteration 9: Global Deviance = 356.5217

```

Step: AIC=368.52

Y ~ X2 + X3 + X5 + X6

```

trying - X2
trying - X3
trying - X5
trying - X6

```

	Df	AIC	LRT	Pr(Chi)
--	----	-----	-----	---------


```

<none>      368.52
- X6      1 368.80 2.2809 0.130978
- X5      1 369.77 3.2436 0.071705 .
- X2      1 373.31 6.7899 0.009168 **
- X3      1 373.94 7.4152 0.006468 **

```

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```

Family: c("PIG", "Poisson.Inverse.Gaussian")
Fitting method: mixed(10, 50)

```

```

Call: gamlss(formula = Y ~ X2 + X3 + X5 + X6, family = PIG, data = data,
method = mixed(10, 50), direction = "backward")

```

```

Mu Coefficients:
(Intercept)      X2      X3      X5      X6
  0.87322    0.19170  -1.88545   0.36742   0.02816
Sigma Coefficients:
(Intercept)
  5.304

```

```

Degrees of Freedom for the fit: 6 Residual Deg. of Freedom 32
Global Deviance:      356.522
AIC:                  368.522
SBC:                  378.347

```

```

GAMLSS-RS iteration 1: Global Deviance = 365.9298
GAMLSS-RS iteration 2: Global Deviance = 358.8009
GAMLSS-RS iteration 3: Global Deviance = 357.7574
GAMLSS-RS iteration 4: Global Deviance = 357.3322
GAMLSS-RS iteration 5: Global Deviance = 357.1072
GAMLSS-RS iteration 6: Global Deviance = 356.9755
GAMLSS-RS iteration 7: Global Deviance = 356.8927
GAMLSS-RS iteration 8: Global Deviance = 356.8271
GAMLSS-RS iteration 9: Global Deviance = 356.7794
GAMLSS-RS iteration 10: Global Deviance = 356.7434
GAMLSS-CG iteration 1: Global Deviance = 356.5447
GAMLSS-CG iteration 2: Global Deviance = 356.5405
GAMLSS-CG iteration 3: Global Deviance = 356.5375
GAMLSS-CG iteration 4: Global Deviance = 356.5296
GAMLSS-CG iteration 5: Global Deviance = 356.5274
GAMLSS-CG iteration 6: Global Deviance = 356.5248
GAMLSS-CG iteration 7: Global Deviance = 356.5236
GAMLSS-CG iteration 8: Global Deviance = 356.5224
GAMLSS-CG iteration 9: Global Deviance = 356.5217

```

```

*****
Family: c("PIG", "Poisson.Inverse.Gaussian")

```

```

Call: gamlss(formula = Y ~ X2 + X3 + X5 + X6, family = PIG, data = data,
method = mixed(10, 50))

```

```

Fitting method: mixed(10, 50)

```

```

-----
Mu link function: log
Mu Coefficients:

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.87322	2.49022	0.351	0.72814
X2	0.19170	0.06730	2.848	0.00762 **
X3	-1.88545	0.72082	-2.616	0.01347 *
X5	0.36742	0.19854	1.851	0.07348 .
X6	0.02816	0.01889	1.491	0.14583

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```

-----
Sigma link function: log
Sigma Coefficients:

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
--	----------	------------	---------	----------


```

(Intercept)  5.304    2.321    2.285    0.0291 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```

-----
No. of observations in the fit: 38
Degrees of Freedom for the fit: 6
Residual Deg. of Freedom: 32
at cycle: 9

```

```

Global Deviance: 356.5217
AIC: 368.5217
SBC: 378.3472

```

```

GAMLSS-RS iteration 1: Global Deviance = 368.1634
GAMLSS-RS iteration 2: Global Deviance = 361.083
GAMLSS-RS iteration 3: Global Deviance = 360.0333
GAMLSS-RS iteration 4: Global Deviance = 359.6023
GAMLSS-RS iteration 5: Global Deviance = 359.3809
GAMLSS-RS iteration 6: Global Deviance = 359.2441
GAMLSS-RS iteration 7: Global Deviance = 359.1523
GAMLSS-RS iteration 8: Global Deviance = 359.0874
GAMLSS-RS iteration 9: Global Deviance = 359.0427
GAMLSS-RS iteration 10: Global Deviance = 359.0078
GAMLSS-CG iteration 1: Global Deviance = 358.8171
GAMLSS-CG iteration 2: Global Deviance = 358.8087
GAMLSS-CG iteration 3: Global Deviance = 358.8052
GAMLSS-CG iteration 4: Global Deviance = 358.8035
GAMLSS-CG iteration 5: Global Deviance = 358.8025

```

```

Family: c("PIG", "Poisson.Inverse.Gaussian")

```

```

Call: gamlss(formula = Y ~ X2 + X3 + X5, family = PIG, data = data,
method = mixed(10, 50))

```

```

Fitting method: mixed(10, 50)

```

```

-----
Mu link function: log

```

```

Mu Coefficients:

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.5055	2.5668	0.197	0.84508
X2	0.2570	0.0498	5.161	1.15e-05 ***
X3	-1.9701	0.6796	-2.899	0.00661 **
X5	0.4031	0.2070	1.947	0.06007 .

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```

-----
Sigma link function: log

```

```

Sigma Coefficients:

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	5.430	2.477	2.192	0.0355 *

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```

-----
No. of observations in the fit: 38
Degrees of Freedom for the fit: 5
Residual Deg. of Freedom: 33
at cycle: 5

```

```

Global Deviance: 358.8025
AIC: 368.8025
SBC: 376.9905

```

```

residuals(m1)

```

```

[1] -0.82292897 -0.27564049  0.08146183  2.27370572  1.59483815  1.78406846
[7]  1.63060215 -0.03780396  1.94222954  1.82680461 -1.74195226 -1.52955860
[13]  1.93098090  2.03465692 -0.04913180  0.25132699  1.28826436 -0.87535053

```



```
[19] -1.51268179  0.73390365 -1.92637928  0.10192120  1.68939879  1.77305431
[25] -1.30152366 -0.34003064  0.12889632 -1.67402306 -1.25968761  0.06802125
[31] -1.69223900  0.04500510 -0.90007062  0.40025061 -0.12482297  2.23536817
[37]  1.18684886 -2.05986126
```

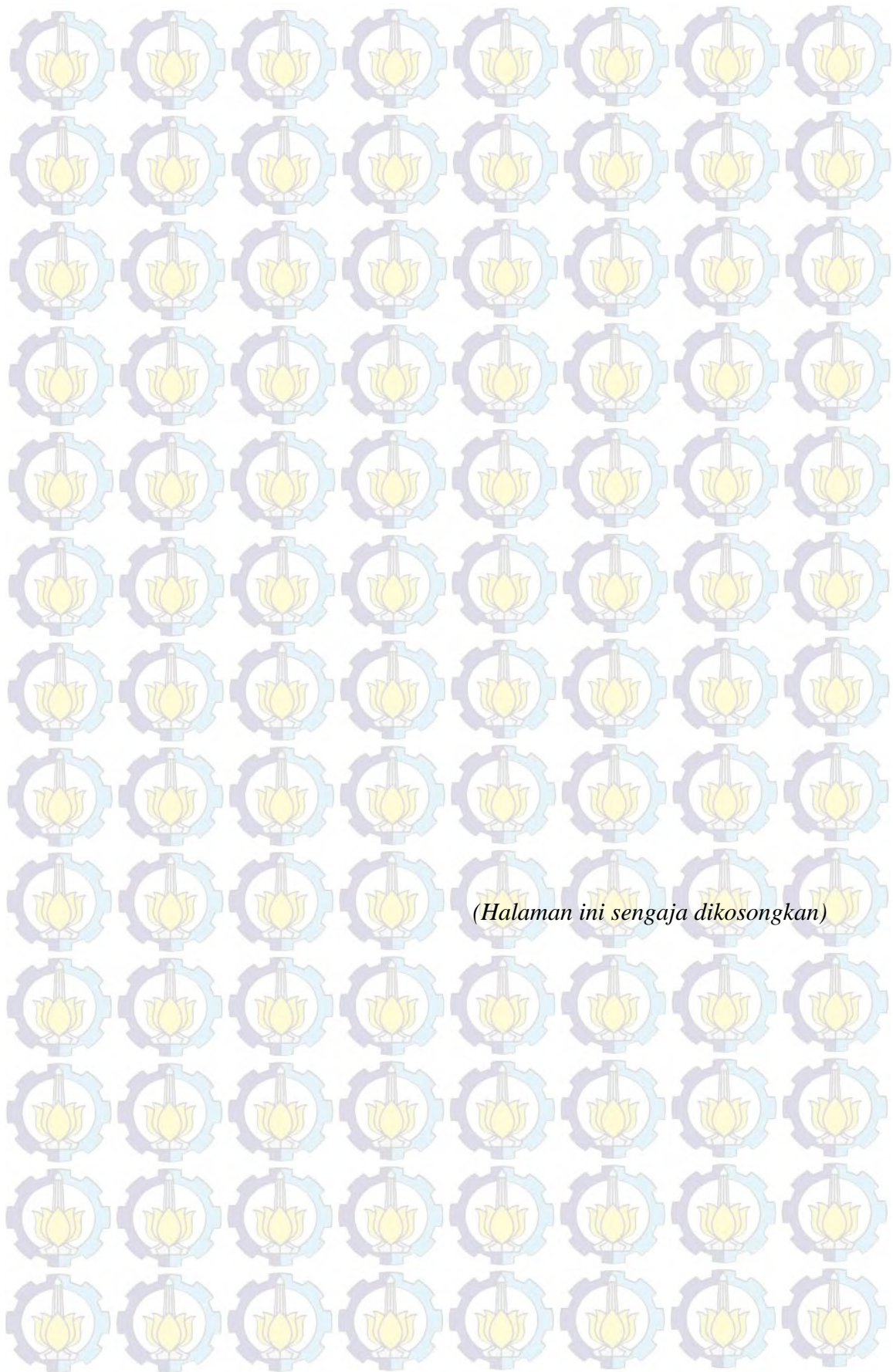
```
plot(m1)
```

```
*****
```

Summary of the Randomised Quantile Residuals

```
      mean = 0.1809979
      variance = 1.869751
      coef. of skewness = -0.0106926
      coef. of kurtosis = 1.632161
      Filliben correlation coefficient = 0.9687167
```

```
*****
```

Daftar Pustaka

- Badan Pusat Statistik Republik Indonesia. (2013). Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia Tahun 2012. Jakarta: BPS Republik Indonesia.
- Cameron, A.C. dan Trivedi, P.K. (1990), "Regression-Based Test For Overdispersion In The Poisson Model", *Journal of Econometrics*, Vol. 46, No. 1, hal. 347-364.
- Cameron, A.C. dan Trivedi, P.K. (1998), "*Regression Analysis of Data Count*", 1st edition, Cambridge University, Press., New York.
- Cole, T.J. dan Green, P.J. (1992), "Smoothing Reference Centile Curves : The LMS Method and Penalized Likelihood", *Statistics in Medicine*, Vol. 11, hal. 1305-1319.
- Consul, P.C. dan Famoye, F. (1992), "Generalized Poisson Regression Model", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 21, No. 1, hal. 89-109.
- Coxe, S., West, S. G. dan Aiken, L.S. (2009) , "The Analysis of Count Data : A Gentle Introduction to Poisson Regression and Its Alternatives", *Journal of Personality Assesment*, Vol. 91, No. 2, hal. 121-136.
- Dean, C., Lawless, J. F. dan Willmot, G.E. (1989a) , "A Mixed Poisson-inverse-Gaussian Regression Model", *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 17, No. 2, hal. 171-181.
- Dean, C., Lawless, J. F. dan Willmot, G.E. (1989b) , "Tests for Detecting Overdispersion in Poisson Regression Model", *Journal of the american Statistical Association*, Vol. 84, No. 406, hal. 467-472.
- Déniz, E. G., Ghitany, M. E. dan Gupta, R. C. (2014), "Poisson-Mixed Inverse Gaussian Regression Model And Its Application", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, DOI: [10.1080/03610918.2014.925924](https://doi.org/10.1080/03610918.2014.925924).
- De Jong, P. dan Heller, G.Z. (2008), "*Generalized Linear Models for Insurance Data*", 1st edition, Cambridge University, Press., New York.

- Dinas Kesehatan Propinsi Jawa Timur. (2014). *Profil Kesehatan Propinsi Jawa Timur Tahun 2013*. Surabaya : Dinkes Jatim.
- Filliben, J.J. (1975) , “The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality”, *Technometrics*, Vol. 17, No. 1, hal. 111-117.
- Hilbe, J.M. (2007), “*Negative Binomial Regression*”, 1st edition, Cambridge University, Press., New York.
- Hu, M.C., Pavlicova, M. dan Nunes, E.V. (2011), “Zero-Inflated and Hurdle Models of Count Data with Extra Zeros: Examples from an HIV-Risk Reduction Intervention Trial”, *The American Journal of Drug and Alcohol Abuse*, Vol. 37, hal. 367-375.
- Hutapea, D.M., Sarumpaet, S.M. dan Rasmaliah (2013), “Karakteristik Penderita HIV/AIDS di Klinik VCT Rumah Sakit HKBP Balige Tahun 2008-2012”, *Jurnal Gizi Kesehatan Masyarakat dan Epidemiologi*, Vol. 2(6), hal. 1-10.
- Karlis, D. dan Nikoloulopoulos, E. (2005), “Mixed Poisson Distribution”, *International Statistical Review*, Vol. 73, No. 1, hal. 35-58.
- Karlis, D. dan Xekalaki, E. (2000), “A Simulation Comparison of Several Procedures for Testing the Poisson Assumption”, *The Statistician*, Vol. 49, No. 3, hal. 355-382.
- Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI. (2014). *Situasi dan Analisis HIV AIDS*. Jakarta : Kemenkes RI.
- Ogunmola, O.J., Oladosu, Y.O. dan Olamoyegun, M.A. (2014), ” Relationship between socioeconomic status and HIV infection in a rural tertiary health center”, *HIV/AIDS Research and Palliative Care*, Vol. 4, No.62, hal. 61-67.
- Olewe, T.M., Wayungu, J.O. dan Makau, A.M. (2008), ” Characteristics of Clients Seeking Voluntary Counseling and Testing (VCT) Services in Nairobi Kenya”, *Journal of Applied Biosciences*, Vol. 12, hal. 671-680.
- Owusu, F. (2011), “*Modelling The Occurrence and Incidence of Seropositive HIV Cases (A Case Study at Korle-Bu Teaching Hospital in Ghana)*”, Departement of Mathematics, Kwame Nkrumah University of Science and Technology, Kumasi.

Ratnasari, N.T. dan Purhadi. (2013), "Pemodelan Faktor yang Mempengaruhi Jumlah HIV dan AIDS Propinsi Jawa Timur Menggunakan Regresi Poisson Bivariat", *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, Vol. 2, No.2, hal. 213-218.

Rigby, R.A. dan Stasinopoulus, D.M. (1996), "A Semi-parametric Additive Model for variance Heterogeneity", *Statistics and Computing*, Vol. 6, hal. 57-65.

Ryan, T.A., & Joiner, B.L. (1976). *Normal Probability Plots and Tests for Normality*. Minitab Statistical Software: Technical Reports. The Pennsylvania State University, State College, PA.

Shoukri, M.M., Asyali, M.H., Vandorp, R. dan Kelton, R. (2004), "The Poisson Inverse Gaussian Regression Model in the Analysis of Clustered Counts Data", *Journal of Data Science*, Vol. 2, No. 2, hal. 17-32.

Stasinopoulus, D.M. dan Rigby, R.A. (2007), "Generalized Additive Models for Location Scale and Shape", *Journal of Statistical Software*, Vol. 23, hal. 1-46.

Stasinopoulus, D.M. dan Rigby, R.A. (2007), "Generalized Additive Models for Location Scale and Shape (GAMLSS) in R", *Journal of Statistical Software*, Vol. 20, hal. 1-64.

Susila, G.N.P (2013), *Faktor-faktor yang Mempengaruhi Kepatuhan Minum ARV pada Pasien ODHA di Klinik VCT RSUD Sanjiwani Gianyar*. Bali : Program Pasca Sarjana, Universitas Udayana.

Susilo, B. (2009), *Prevalensi dan Faktor Resiko HIV pada Generalized Epidemic di Tanah Papua Menggunakan Regresi Logistik dengan Stratifikasi (Studi Kasus Surveilands Terpadu HIV-Perilaku (STHP) 2006)*. Surabaya : Program Pasca Sarjana, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Triola, M. (2010), "*Elementary Statistics*", 11th edition, Addison Wesley, Press., New York.

Umami, R.L. (2015), *Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Bivariate Zero-Inflated Poisson Regression (Studi Kasus : Jumlah Kasus Penderita HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo*

Tahun 2012). Surabaya : Program Pasca Sarjana, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Ummah, Z., Sulyanto dan Sediono (2013), “Estimasi Model Linier Tergeneralisasi Gaussian Berdasarkan Maksimum Likelihood Estimator dengan Menggunakan Algoritma Fisher Scoring”, *Jurnal Matematika*, Vol. 1, No.1, hal. 110-120.

Whiteside, A. (2002), “Poverty and HIV/AIDS in Africa”, *Third World Quarterly*, Vol. 23, No.2, hal. 313-332.

World Health Organisation. (2012). Indonesia Progress Report on the Millenium Development Goals: WHO.

Willmot, G.E. (1987), “The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as An Alternative to the Negative Binomial”, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 3, No. 4, hal. 113-127.

Zanakis, S.H., Alvarez, C. dan Li, V. (2007), “Socio-economic Determinants of HIV/AIDS Pandemic and Nations Efficiencies”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 176, No.2, hal. 1181-1838.

Zha, L., Lord, D. dan Zou, Y. (2014), “The Poisson Inverse Gaussian (PIG) Generalized Linear Regression Model for Analyzing Motor Vehicle Crash Data”, *Journal of Transportation Safety and Security*, DOI:20.2080/19439962.2014.977502.

BIOGRAFI PENULIS



Penulis dilahirkan di Denpasar Bali pada tanggal 23 Januari 1984, merupakan putri kedua dari dua bersaudara, buah cinta dari pasangan Bapak I Gusti Ketut Sena Ariawan dan Ibu Ketut Ayu Ari. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di TK Widya Mandala (1988-1990), SD Negeri No 26 Pemecutan (1990-1996), SLTP Negeri 7 Denpasar (1996-1999), SMU Negeri 4 Denpasar (1999-2002).

Kemudian penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang sarjana di Sekolah Tinggi Ilmu Statistik (STIS) Jakarta (2002-2006) jurusan Statistik Sosial Kependudukan. Setelah menyelesaikan pendidikan DIV di STIS, penulis ditugaskan bekerja di BPS Kota Manado Propinsi Sulawesi Utara sebagai Staf Seksi Statistik Sosial dan pada tahun 2009, penulis pindah ke BPS Kota Batu Propinsi Jawa Timur sebagai Staf Seksi IPDS. Pada tahun 2014 penulis memperoleh kesempatan untuk mendapatkan beasiswa dari BPS untuk melanjutkan jenjang pendidikan S2 di Jurusan Statistika Fakultas MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Pembaca yang ingin memberikan kritik, saran dan pertanyaan mengenai penelitian ini, dapat menghubungi penulis melalui email smade84@gmail.com.